Global Journal of HUMAN-SOCIAL SCIENCE: E
Economics
Volume 14 Issue 7 Version 1.0 Year 2014
Type: Double Blind Peer Reviewed International Research Journal
Publisher: Global Journals Inc. (USA)
Online ISSN: 2249-460X & Print ISSN: 0975-587X

# Modélisation et Qantification de la Rentabilité des Systèmes Éducatifs: Formation d'Une Année

By Mohammed El Khomssi & Ghizlane Chaibi

*Faculté des Sciences e Technique Fès, MAROC*

*Résumé-* Les chercheures en économie d'éducation ont étudié le fonctionnement des systèmes éducatifs à l'aide de leurs caractéristiques (Hamidou Nacuzon Sall), l'un des axes de ces recherches est le calcul de la rentabilité qui joue un rôle central lorsqu'il s'agit de déterminer la qualité et la productivité d'une formation. Comme la poursuite des études est un investissement, il est possible de lui associer un taux de rendement. Nous proposons une formulation mathématique de telle façon que la rentabilité soit un zéro d'un polynôme très particulier, la recherche de ce zéro passe par deux étapes :

– L'étude de l'existence et l'unicité de ce zéro.
– La détermination des conditions naturelles à fin d'appliquer une méthode numérique convenable.

Nous clôturons ce travail avec des résultats numériques, des commentaires et des interprétations.

*Motsclés: coût, racine d'un polynôme, rentabilité, revenu, temps de retour.*

*GJHSS-E Classification : FOR Code: 349999*

MODELISATIONETQANTIFICATIONDELARENTABILITEDESSYSTEMESEDUCATIFSFORMATIONDUNEANNEE

*Strictly as per the compliance and regulations of:*

# Modélisation et Quantification de la Rentabilité des Systèmes Éducatifs: Formation d'Une Année

Mohammed El Khomssi [α] & Ghizlane Chaibi [ρ]

*Résumé-* Les chercheures en économie d'éducation ont étudié le fonctionnement des systèmes éducatifs à l'aide de leurs caractéristiques (Hamidou Nacuzon Sall), l'un des axes de ces recherches est le calcul de la rentabilité qui joue un rôle central lorsqu'il s'agit de déterminer la qualité et la productivité d'une formation. Comme la poursuite des études est un investissement, il est possible de lui associer un taux de rendement.

Nous proposons une formulation mathématique de telle façon que la rentabilité soit un zéro d'un polynôme très particulier, la recherche de ce zéro passe par deux étapes :

- L'étude de l'existence et l'unicité de ce zéro.
- La détermination des conditions naturelles à fin d'appliquer une méthode numérique convenable.

Nous clôturons ce travail avec des résultats numériques, des commentaires et des interprétations.

*Mots-clés: coût, racine d'un polynôme, rentabilité, revenu, temps de retour.*

## I. Introduction

Evaluer la rentabilité d'un projet, c'est comparer les gains futurs de ce projet au coût initial de l'investissement. L'éducation définie comme le stock de connaissances accumulées par l'individu, est un capital, auquel on peut associer une rentabilité qui, elle-même, va déterminer le comportement de demande des individus (TEMPLE, 2001). On peut aussi déterminer la valeur actuelle nette de l'investissement. Les êtres humains peuvent investir en eux même pour devenir plus productifs de façon permanente toute leur vie (KHOTI, 1964), cet investissement nécessite des coûts dont la rentabilisation sera l'objectif. Dans ce papier, nous étudions cette notion de rentabilité pour ce qui concerne l'enseignement et la formation, et nous proposons une équation bilan qui tient compte du temps de formation (une année[1] ), et l'espérance de vie.

*Author α: Professeur d'enseignement supérieur, Faculté des Sciences et Technique Fès MAROC. e-mail: khomsixmath@yahoo.fr*

*Author ρ: Étudiant doctorante chercheur au Laboratoire de Modélisation et Calcul Scientifique Faculté des Sciences et Technique Fès MAROC. e-mail: Ghizlane.CHAIBI@usmba.ac.ma*

[1] Dans un travail en cour de rédaction, nous cherchons la rentabilité d'une formation préparée sur N année, et nous tenons compte de la durée du chômage qui est une réalité sociale, ce qui rend l'écriture mathématique plus générale.

## II. Formulation Mathématique de la Rentabilité

### *a) Taux de rentabilité interne*

Évaluer un projet d'investissement conduit à comparer le capital investi à l'ensemble des cash-flows liés à ce projet, mais il est nécessaire d'actualiser les flux générés à la date début de l'investissement. Il existe quatre critères principaux d'évaluation: la valeur actuelle nette, l'indice de profitabilité, le délai de récupération du capital, et le taux de rentabilité interne (Nathalie, 2006). La valeur actuelle nette notée (VAN) se calcule en faisant la somme de tous les flux générés par le projet, chaque flux étant ramené à sa valeur actuelle à l'année 0:

$$VAN = -capital + \sum_{n} \frac{flux}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

Quand les dépenses d'investissement s'étalent sur plusieurs périodes, la valeur actuelle nette devient:

$$VAN = -\sum_{m} \frac{dépenses}{(1+i)^m} + \sum_{n} \frac{flux}{(1+i)^n} \qquad (2)$$

- Le taux d'actualisation à utiliser noté $i$ est le taux de rentabilité minimum exigé par l'entreprise. Théoriquement, ce taux représente le coût des capitaux utilisés par l'entreprise.
- Le taux de rentabilité d'un projet noté (TRI) est le taux d'actualisation qui donne une VAN nulle, il est utilisé comme critère d'élimination ou comme critère de comparaison entre les projets de même nature (REVERDY, 1997).

### *b) Rentabilité interne d'une année*

Un étudiant venant de terminer un niveau donné, peut soit passer à un niveau supérieur, soit arrêter ses études pour intégrer le milieu professionnel (GRAVOT, 2007). Dans le premier cas il obtiendra un flux de revenus évalué à $A_0$ l'année suivante, $A_1$ la deuxième année,..., $A_{n-1}$ la n[ième] année.

Dans le deuxième cas, s'il continue ses études une année supplémentaire, il subira pendant cette année des coûts directs[2] et indirects[3] $D_0$ et des coûts

[2] Les coûts directs sont des coûts liés à la poursuite des études (les droits d'inscriptions, l'accès à la bibliothèque, les activités sportives...).

d'opportunité[4]. S'il arrête ses études à ce niveau, il gagnera des revenus évalués à $B_1$ pour la première année (deuxième année pour le premier), $B_2$ pour la deuxième année,..., $B_n$ pour la n[ième] année.

Les gains nets correspondant à l'investissement de celui qui a étudié une année de plus seront donc: $B_1 - A_1$ pour la première année, $B_2 - A_2$ pour la deuxième année,..., $B_n - A_n$ pour la n[ième] année.

Soit $C_0$ la somme des divers coûts, nous expliquons le parcours possible à l'aide de la figure suivante. Ce qui donne le chemin expliquant le passage d'une année à une autre

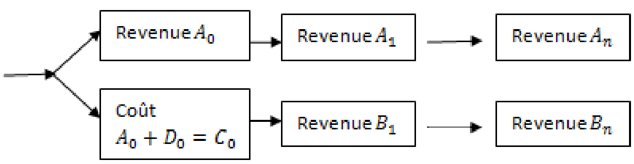


*Fig.1*

Tenant compte de (1), le bilan opérationnel du passage d'une année d'étude à une autre jusqu'à l'arrêt d'étude nous permet de formuler le taux de rentabilité que nous notons simplement $r$ comme suit:

$$\frac{(B_1 - A_1)}{(1+r)} + \frac{B_2 - A_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{B_T - A_T}{(1+r)^T} = C_0 \qquad (3)$$

avec $T$ L'espérance de vie.

## III. Problème Inverse de L'analyse de Rentabilité

### a) *Formulation mathématique*

Précédemment, nous avons défini le taux de rentabilité $r$ d'un investissement scolaire sur une année d'étude comme le taux d'actualisation vérifiant la relation:

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} = C_0$$

Pour compléter cette modélisation, nous allons définir trois inégalités :

- Le bon sens de la modélisation impose que $\forall\, i \in \{1,2,\dots,T\} \quad B_i > A_i$ car il n'y a aucun intérêt d'ajouter une année d'étude sans avoir un impact économique, sauf cause culturelle, qui n'est pas l'objectif dans ce papier.
- La deuxième condition naturelle est qu'il n'existe aucun système éducatif qui puisse amortir les coûts en une année, d'où : $\forall\, i \in \{1,2,\dots,T\} \quad B_i - A_i < C_0$

Ainsi, notre problème se transforme en la recherche de $r$ solution de l'équation bilan

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} = C_0$$

sous les hypothèses suivantes :

*H1* : Justification de la poursuite des études $\forall\, i \in \{1,2,\dots,T\} \quad B_i > A_i$

*H2* : L'impossibilité de recouvrir les coûts en une année $\forall\, i \in \{1,2,\dots,T\} \quad B_i - A_i < C_0$

Pour résoudre ce problème, nous avons obtenu le lemme suivant:

*Lemme :* Le taux de rentabilité d'un investissement sur une année d'étude est lié à un zéro d'un polynôme $P$ définit par:

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k$$

avec $a_k \in ]0,1[ \quad \forall\, k < T$.

*Preuve:* il suffit de faire le changement de variable trivial : $x = 1 + r$ et de poser

$$\mathrm{a_m} = \frac{\mathrm{B_{T-m}} - \mathrm{A_{T-m}}}{\mathrm{C_0}}$$

l'équation (3) s'écrit sous la forme:

$$x^T - \sum_{m=0}^{T-1} a_m x^m = 0$$

de plus, à partir de (H1) et (H2), il est facile de remarquer que $a_m \in ]0,1[$ , d'où le lemme.

*Remarque:* Nous pouvons étudier les zéros d'un polynôme à deux points de vue bien différentes, le premier est celui de l'Algèbre, il consiste à rechercher les propriétés de nature arithmétiques des zéros, connaissant ceux des coefficients ; c'est la théorie de Galois. Le second point de vue consiste à rechercher les positions des zéros dans le plan complexe à l'aide des propriétés analytique du polynôme ; c'est la théorie Analytique des fonctions holomorphe. Pour notre modélisation, le degré du polynôme lié à la rentabilité comme étant l'espérance de vie d'un être humain est très élevée[5] (T >32), pour cette raison il est très difficile, voire impossible d'exprimer ses zéros à partir de ses coefficients. Par conséquent, nous étudions le polynôme comme une fonction analytique.

[3] Les coûts indirects sont des dépenses spécifiques liées aux études (achat de livres, de polycopiés...).

[4] Le coût d'opportunité des études c'est le profil de revenus auxquels peut prétendre l'étudiant qui s'arrête les études au niveau de référence.

[5] La plus petite espérance de vie est 32 de Swaziland.

*b) Existence et unicité des racines*

La recherche du taux de rentabilité $r$ via le lemme se traduit par l'existence et l'unicité de zéro de $P$.

*Proposition :* le polynôme $P$ définit par:

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k$$

avec

$$\begin{cases} a_k \in ]0,1[ \quad \forall\, k < T \\ \qquad x > 0 \end{cases}$$

admet une seule racine simple.

*Preuve:* Posons $\psi$ la fonction au moins de deux dérivable définit par:

$$\psi(x) = \frac{P(x)}{x^T} = 1 - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^{k-T} \qquad pour\ x > 0$$

sa dérivée est:

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{T-1} (T-k) a_k x^{k-T-1}$$

$\psi$ est croissante pour $x$ strictement positive et

$$\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \psi(x) = 1$$

donc elle admet une seule racine, mais est-elle simple?

Soit $R$ la racine de $P$, pour montrer que cette racine est simple, il faut et il suffit de montrer que $P'$ ne s'annule pas. Supposons que $R$ est une racine de la dérivée, donc $R$ vérifie:

$$R^T = \sum_{k=1}^{T-1} \frac{k a_k}{T} R^k$$

or $R$ racine de $P$, donc elle vérifie de plus :

$$a_0 + \sum_{k=1}^{T-1} a_k \left(1 - \frac{k}{T}\right) R^k = 0$$

Cette dernière égalité est impossible, car la somme des termes positifs non nuls ne peut pas être égale à zéro. Ainsi nous obtenons l'existence d'une racine simple unique strictement positive réalisant l'équation bilan. Reste à montrer qu'elle appartient à l'intervalle ]1,2[ puisque la rentabilité r ∈]0,1[. Pour cela nous rappelons le théorème suivant:

i. *Théorème(Lagrange)*

Soit $P$ le polynôme défini par:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

supposons que $a_n > 0$ et que les $a_k$ ne sont pas tous positives ou nul. Soit $K < n$ le plus grand naturel tel que $a_K < 0$, posons $A = \max\{|a_k| : a_k < 0\}$ alors, tout zéro x>0 de $P$ est tel que :

$$x < 1 + \sqrt[n-K]{\frac{A}{a_n}}$$

Il s'agit de l'inégalité de Lagrange qui détermine une boule localisant les racines.

À l'aide de ce théorème nous obtenons la proposition suivante:

*Proposition* : Considérons $P$ défini par:

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k$$

avec $a_k \in ]0,1[ \quad \forall\, k < T$

tout zéro $x$ de $P$ est tel que $x \in ]1,2[$.

*Preuve:* La preuve de la proposition est une conséquence du théorème de Lagrange, en effet ce théorème postule qu'il existe $a_n > 0$ ce qui est le cas pour $a_T = 1$ . Les autres coefficients sont toutes négatives si nous écrivons

$$P(x) = x^T + \sum_{k=0}^{T-1} \tilde{a}_k x^k$$

avec

$$\begin{cases} \qquad a_T = 1 \\ \tilde{a}_k \in ]-1,0[ \quad \forall\, k < T \end{cases}$$

et nous appliquons l'inégalité de Lagarnge avec: $n = T,\ K = T-1\ et\ A = max_{m=0}^{T-1}\, a_m$

alors le zéro vérifie

$$x < 1 + max_{m=0}^{T-1}\, a_m < 2$$

pour démontrer l'autre inégalité nous avons

$$P(1) = 1 - \sum_{m=0}^{T-1} a_m = 1 - \sum_{m=0}^{T-1} \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{C_0}$$

or d'après l'équation (3) nous avons

$$\sum_{m=0}^{T-1} \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{(1+r)^{T-m}} = C_0$$

Par conséquent :

$$\sum_{m=0}^{T-1} B_{T-m} - A_{T-m} > C_0$$

Donc

$$P(1) < 0$$

et puisque

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

donc

$$x \in ]1, +\infty[$$

Ainsi nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution.

c) *Algorithme de résolution*

Notre travail transforme la recherche de la rentabilité d'une formation d'une année à la recherche des zéros d'un polynôme définit à (partir de la différence des revenus et l'espérance de vie. Nous avons montré théoriquement l'existence d'un seul zéro simple pour ce polynôme dans l'intervalle ]1,2[, ce qui permet pratiquement de choisir un algorithme convergeant vers ce zéro. Nous proposons l'algorithme de Newton adapté à notre problème, ce choix est possible car lorsque la suite itérative converge vers la solution nous n'avons pas de problème de divergence. Puisque la dérivée du polynôme ne s'annule pas au voisinage de la racine. Ainsi nous avons l'algorithme suivant:

$$x_{n+1} = \frac{x_n P'(x_n) - P(x_n)}{P'(x_n)} \quad avec\ x_0\ donnée$$

Si nous remplaçons les données par leurs expressions, nous obtenons:

$$x_{n+1} = \frac{(T-1)x_n^T \;+ \sum_{k=1}^{T-1} \left(x_n a_k - k a_k\right) x_n^{k-1} + a_0}{T x_n^{T-1} - \sum_{k=1}^{T-1} k a_k x_n^{k-1}}$$

le test d'arrêt est simple, il suffit d'avoir :

$$e_n = |\, x_{n+1} - x_n | < \varepsilon \text{ donnée.}$$

une fois le zéro $x$ est déterminé, nous obtenons le taux de rentabilité sachant que $r = x - 1$.

## IV. Application

Cherchons la rentabilité de la formation Licence par rapport au DEUG. Pour cela, nous comparons les revenus annuels d'un salarié diplômé Licence et un autre diplômé DEUG. Pour rendre l'application plus concrète, nous considérons quatre filières différentes de Licence, notées $F_1$, , $F_2$ , $F_3$, $F_4$.

Pour chaque formation, nous précisions ces dépenses ($D_0$) et également le premier revenu annuel. Pour simplifier les calculs nous supposons qu'il varie annuellement avec un taux fixé. Nous récapitulons ces données dans le tableau suivant avec des chiffres approximatif des salariés Marocains donnés en Dollar($)

*Table : 1*

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Dépense | 4515.36 | 9030.72 | 13546.08 | 9030.72 |
| Revenus | 8127.648 | 8127.648 | 8127.648 | 13546.08 |
| Taux | 1% | 1.2% | 1.3% | 1% |

Le premier revenu d'un diplômé de DEUG est :

$A_0$ =60 000 et il varié par un taux t=0.8%, donc son revenu de la n$^{ième}$ année est $A_n = A_0(1+t)^n$. Le revenu salariés diplômés de Licence de la n$^{ième}$ année est $B_n = B_0(1+t)^n$.

A l'aide du changement de variable suivant

$$a_m = \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{C_0}$$

avec

$$A_0 + D_0 = C_0$$

nous obtenons l'écriture de $P(x)$.

Pour chaque filière, nous cherchons son unique zéro dans l'intervalle ]1,2[ et nous traçons sa courbe comme suit:

- Pour $F_1$ nous avons
  $P(1) = -5.51$ et $P(2) = 9.07\ 10^{11}$
  le zéro est $x = 1.133$

la rentabilité de la filière $F_1$ est $r = 0.133$.

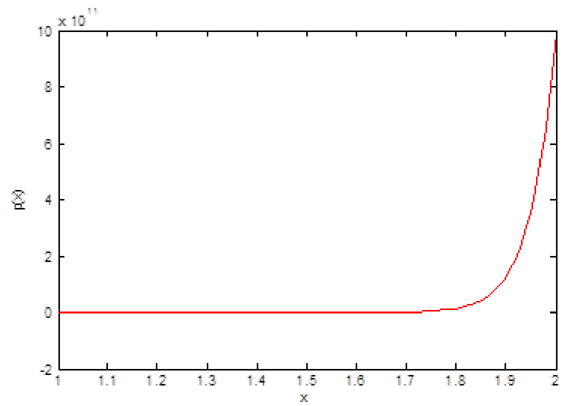


*Figure : 2* La courbe de $P$ pour $F_1$

Pour $F_2$ nous avons
$P(1) = -4.93$ et $P(2) = 1.006\ 10^{12}$
le zéro est $x = 1.107$
la rentabilité de la filière $F_2$ est $r = 0.107$

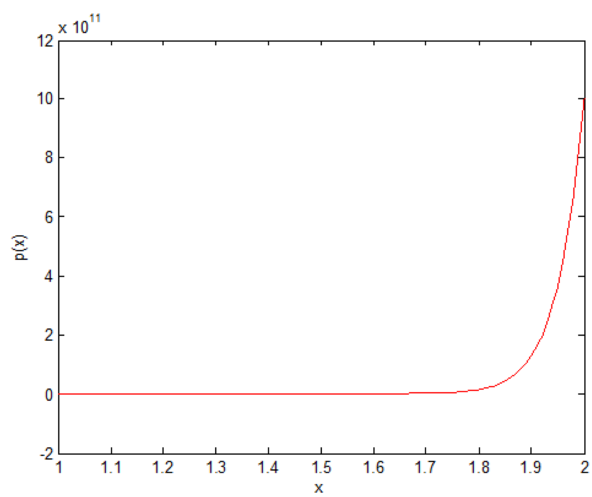


*Figure : 3* La courbe de $P$ pour $F_2$

Une des conséquences pratique de notre étude est qu'elle permet de déterminer le taux de rentabilité $r$ que nous comparons avec le taux d'actualisation $t_a$. Tout système éducatif telle que $r \le t_a$ sera rejetable au sens économique, par suite, il faudra encourager le système éducatif sous la condition $r > t_a$.

Le même algorithme se répète pour la filière $F_3$ et $F_4$, nous traçons les quatre courbes dans le graphe suivant :

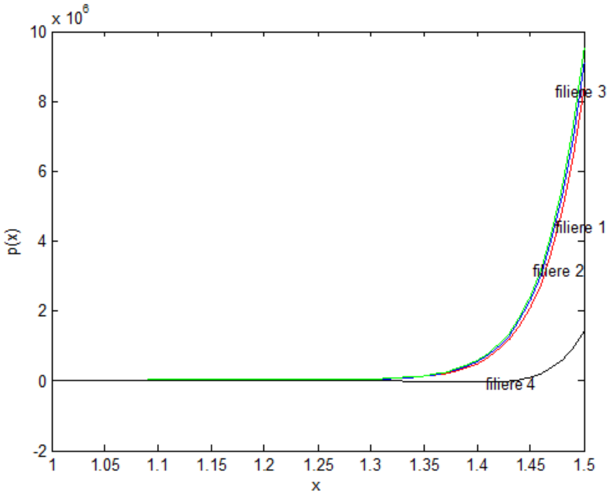


*Figure : 4* La courbe de *P* pour les quatre filières

Maintenant si nous cherchons la rentabilité des quatre filières à l'aide de l'algorithme précédent mais avec des valeurs d'espérance de vie différentes, le tableau suivant donne les résultats obtenus :

*Table : 2* La variation de la rentabilité avec l'espérance de vie

| Espérance de vie | F1 | F2 | F3 | F4 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,1161 | 0,0816 | 0,0938 | 0,4368 |
| 30 | 0,1296 | 0,1011 | 0,0947 | 0,4371 |
| 40 | 0,1332 | 0,1073 | 0,0953 | 0,3472 |
| 50 | 0,1342 | 0,1096 | 0,0956 | 0,3472 |
| 60 | 0,1346 | 0,1104 | 0,0958 | 0,3472 |
| 90 | 0,1347 | 0,1110 | 0,0960 | 0,3472 |
| 100 | 0,1347 | 0,1110 | 0,0960 | 0,3472 |

Remarquons que $F_1$ est toujours plus rentable que $F_2$ même si elles ont un revenu de base identique et un taux de variation de $F_1$ qui est inférieur à celui de $F_2$ . Ceci étant dû au fait que les dépenses de $F_1$ sont inférieur à ceux de $F_2$.

Remarquons également que $F_4$ est la plus rentable parmi les quatre filières, même avec la plus petite valeur du taux de variation (1%), c'est une conséquence directe du fait que le revenu de base est élevé en comparaison à ceux des autres filières étudiées.

*a) Commentaire sur les graphes obtenus Nous constatons que*

Les fonctions sont presque constante jusqu'à une valeur à partir de la quelle il varie rapidement (presque exponentiellement). Cela peut être expliqué par le recouvrement des coûts d'un certain nombre d'années d'activités professionnelles.

La figure 3, qui contient les courbes de diverses situations, montre l'influence des deux données à savoir le revenu ainsi que le taux de sa variation.

Nous pouvons conclure qu'on peut classifier en trois grandes catégories socioprofessionnelles la rentabilité d'un système éducatif à partir des trois possibilités :

- Salaire de base faible avec un taux de variation élevé.
- Salaire de base élevé avec un taux de variation faible.
- Salaire de base élevé avec un taux de variation élevé.

Une étude numérique nécessite des données réelles, chose que nous désirons faire dans un travail ultérieur.

## V. Conclusion

La modélisation générale du bilan de rentabilité, nous a donné un polynôme très particulier dont la racine représente la rentabilité. L'existence et l'unicité sont assurées par une étude analytique de ce polynôme.

La technique numérique proposée complète cette étude en appliquant ce travail sur des données liées au système éducatif au MAROC. Dans un prochain papier, nous chercherons la rentabilité d'une formation durant N année au lieu d'une seule année. Nous travaillerons également sur la notion de moyenne via une écriture de groupe où lieu d'un individu.

## References Références Referencias

1. Hamidou Nacuzon Sall, J. M. *Mesure et évaluation en éducation* (Vol. 19 n 3).
2. GRAVOT, P. ( 2007). *E_Thème N1: Capital Humain et Demande de Formation Initiale.*
3. KHOTI. (1964). *Le Rendement de l'Education, volume5.*
4. Nathalie, G. (29-6-2006). *Finance d'entepise, chapitre 2 la décision de l'investissement.*
5. REVERDY. (1997). *Evaluation de la Rentabilité Economique d'un projet d'Investissement.*
6. TEMPLE. (2001). *Effet de l'éducation et du capital social sur la croissance dans les pays de l'OCDE.* Revue Economique de l'OCDE.