

# Holder 不等式再推广的几种形式

Holder further promote several forms of inequality

孙凤庆

Sun Fengqing

(山东德州职业技术学院计算机系 山东德州 253034)

GJSFR- F Clasification FOR  
010203, 010111, 010108, 26A42

**摘要:**本文主要对原 Holder 不等式进行了进一步的推广, 将原 Holder 不等式由 2 个实数列推广到  $m(m \geq 2)$  个实数列, 同时给出推广后的 Holder 不等式的几种不同形式并对其加以数学证明.

**关键字:**Holder 不等式, 推广的 Holder 不等式, 引理 (Young 不等式的推广), 琴生不等式, 级数, Riemann 积分.

**中图分类号:** O178

## 1. Holder 不等式

设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  与  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  是两个非负实数列;  $\alpha$  与  $\beta$  为两个正数, 且  $\alpha + \beta = 1$

$$\text{则: } \sum_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^\beta$$

且只有当  $a_i = 0$  或  $b_i = 0$  或者存在正数  $k$  使得  $a_i = k b_i$  时 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 等号才成立.

## 2. 推广的 Holder 不等式

设  $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) 是  $m$  个非负实数列;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为  $m$  个正数, 且

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 \quad (m \geq 2) \quad \text{则: } \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\alpha_j} \leq \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} \right)^{\alpha_j} \quad (1)$$

且只有当  $a_{1i} = 0$  或  $a_{2i} = 0 \dots \dots$  或  $a_{mi} = 0$  或者存在  $m$  个正数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 a_{1i} = k_2 a_{2i} = \dots = k_m a_{mi} \quad \text{时} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{等号才成立.}$$

**证明:** 1) 引理 (Young 不等式的推广): 设  $a_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ );  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为  $m$  个正数,

作者简介: 孙凤庆 (1963. 12), 男, 副教授, 大学本科 (工学学士), E-mail: sunfengqing1963@126.com

$$\text{且 } \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 \quad \text{则: } \prod_{j=1}^m a_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j$$

且只有当  $a_1 = a_2 = \dots = a_m$  时，等号才成立。证明：① 当  $a_1, a_2, \dots, a_m$  中有一个为 0 时，不等式显然成立

② 当  $a_1, a_2, \dots, a_m$  都大于 0 时，对不等式  $\prod_{j=1}^m a_j^{\partial_j} \leq \sum_{j=1}^m \partial_j a_j$  两边取自然对数，可得

$$\sum_{j=1}^m \partial_j \ln a_j \leq \ln \left( \sum_{j=1}^m \partial_j a_j \right), \text{ 只需证明该不等式成立即可, 这可利用琴生不等式进行证明}$$

令函数  $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ) 显然该函数  $f(x) = \ln x$  在  $x > 0$  上为上凸函数，而又正数列

$$\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m \text{ 满足 } \sum_{j=1}^m \partial_j = 1$$

$$\text{因此由琴生不等式可得: } \sum_{j=1}^m \partial_j f(a_j) \leq f\left(\sum_{j=1}^m \partial_j a_j\right) \text{ 即, } \sum_{j=1}^m \partial_j \ln a_j \leq \ln\left(\sum_{j=1}^m \partial_j a_j\right)$$

且只有当  $a_1 = a_2 = \dots = a_m$  时，等号才成立

$$\text{于是不等式: } \prod_{j=1}^m a_j^{\partial_j} \leq \sum_{j=1}^m \partial_j a_j \text{ 得证.}$$

## 2) 再证明推广的 Holder 不等式(即 (1) 式)

① 当  $a_{1i} = 0$  或  $a_{2i} = 0 \dots \dots$  或  $a_{mi} = 0$  时 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，(1) 式显然成立，且等号成立

② 当  $\sum_{i=1}^n a_{ji} \neq 0$  (即:  $\sum_{i=1}^n a_{ji} > 0$ ) 时 ( $j = 1, 2, \dots, m$ )

$$\text{记: } \sum_{i=1}^n a_{ji} = A_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{则 (1) 式变为: } \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j} \leq \prod_{j=1}^m A_j^{\partial_j} \quad \text{即: } \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}}{\prod_{j=1}^m A_j^{\partial_j}} \leq 1, \text{ 只需证明此不等式即可}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}}{\prod_{j=1}^m A_j^{\partial_j}} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{a_{ji}^{\partial_j}}{A_j^{\partial_j}} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left( \frac{a_{ji}}{A_j} \right)^{\partial_j} \quad \text{而 } \sum_{j=1}^m \partial_j = 1, \text{ 因此由上述引理可得:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left( \frac{a_{ji}}{A_j} \right)^{\partial_j} &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \partial_j \cdot \frac{a_{ji}}{A_j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial_j}{A_j} a_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial_j}{A_j} \sum_{i=1}^n a_{ji} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial_j}{A_j} \cdot A_j = \sum_{j=1}^m \partial_j = 1 \end{aligned}$$

$$\text{即得: } \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}}{\prod_{j=1}^m A_j^{\partial_j}} \leq 1, \text{ 于是 (1) 式得证}$$

且由引理知: 只有当  $\frac{a_{1i}}{A_1} = \frac{a_{2i}}{A_2} = \dots = \frac{a_{mi}}{A_m}$  即  $k_1 a_{1i} = k_2 a_{2i} = \dots = k_m a_{mi}$  时 ( $i=1,2,\dots,n$ ) 等号才成立, 其中  $k_j = \frac{1}{A_j}$  ( $j=1,2,\dots,m$ ).

### 3. 推广的 Holder 不等式的级数形式

设  $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots)$ , ( $j=1,2,\dots,m$ ) 是  $m$  个无穷非负实数列;  $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$  为  $m$  个正数, 且

$$\sum_{j=1}^m \partial_j = 1 \quad (m \geq 2)$$

若级数  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) 均收敛, 则级数  $\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}$  (绝对) 收敛

$$\text{且: } \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j} \leq \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} \right)^{\partial_j}. \quad (2)$$

**证明:** 由上述引理 (Young 不等式的推广) 知:  $0 \leq \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j} \leq \sum_{j=1}^m \partial_j a_{ji} \leq \sum_{j=1}^m a_{ji}$

由此可得级数  $\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}$  (绝对) 收敛

记数列:  $S_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ji}^{\partial_j}$ ,  $A_{jn} = \sum_{i=1}^n a_{ji}$  ( $j=1,2,\dots,m$ )

则由 (1) 式知:  $S_n \leq \prod_{j=1}^m A_{jn}^{\partial_j}$ , 再由数列极限性质可得 (2) 式成立.

#### 4. 推广的 Holder 不等式的 Riemann 积分形式

设函数  $f_j(x)$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) 均在闭区间  $[a,b]$  上 Riemann 可积, 且于  $[a,b]$  上恒有  $f_j(x) \geq 0$  ( $j=1,2,\dots,m$ );  $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$  为  $m$  个正数, 且  $\sum_{j=1}^m \partial_j = 1$  ( $m \geq 2$ )

则:  $\int_a^b \prod_{j=1}^m f_j^{\partial_j}(x) dx \leq \prod_{j=1}^m \left( \int_a^b f_j(x) dx \right)^{\partial_j}$ . (3)

**证明:** 将区间  $[a,b]$  进行  $n$  等分, 分点  $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  于是

$$\int_a^b \prod_{j=1}^m f_j^{\partial_j}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f_j^{\partial_j}(x_i) \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f_j(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_j(x_i) \frac{b-a}{n} \quad j=1,2,\dots,m$$

由 (1) 式可得:  $\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f_j^{\partial_j}(x_i) \leq \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n f_j(x_i) \right)^{\partial_j}$  而  $\sum_{j=1}^m \partial_j = 1$

再由极限保号性质可得 (3) 式成立.

**注：**对  $x \in [a, b]$ ，只有当  $f_1(x) \equiv 0$  或  $f_2(x) \equiv 0$  ..... 或  $f_m(x) \equiv 0$  或者存在  $m$  个常数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得  $k_1 f_1(x) \equiv k_2 f_2(x) \equiv \dots \equiv k_m f_m(x)$  时，(3) 式中等号才成立。

#### 参考文献：

- [1] 李心灿 的《Holder 不等式的一种推广》一书，北京航空学院出版/1957
- [2] 历倩 的 Holder 不等式的再推广及应用，《数学通讯》，2006—05
- [3] 熊斌 的 Schur 不等式和 Holder 不等式及其应用，《数学通讯》，2005—15
- [4] 陶双平马国顺 的一个广义 Holder 不等式，《安康师专学报》，1992—02
- [5] 胡克 的论 Holder 不等式，《江西师范大学学报·自然科学版》，1994—03
- [6] 文开庭 的 Holder 不等式的新推广，《毕节师范高等专科学校学报》，2002—01
- [7] 张天德 韩振来的数学分析同步辅导及习题精解，天津科学技术出版社，2009，7