



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH
MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES

Volume 13 Issue 5 Version 1.0 Year 2013

Type : Double Blind Peer Reviewed International Research Journal

Publisher: Global Journals Inc. (USA)

Online ISSN: 2249-4626 & Print ISSN: 0975-5896

A Summation Formula in the Light of Recurrence Relation

By Salahuddin & M. P. Chaudhary

P.D.M College of Engineering, India

Abstract - The main aim of the present paper is to compute a summation formula in the light of recurrence relation and contiguous relation.

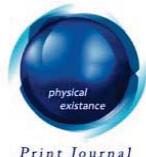
Keywords : pochhammer symbol, gaussian hypergeometric function, contiguous function, recurrence relation, bailey summation theorem and legendre duplication formula.

GJSFR-F Classification : MSC 2010: 65Q30, 40A25



Strictly as per the compliance and regulations of :





A Summation Formula in the Light of Recurrence Relation

Salahuddin^α & M. P. Chaudhary^σ

Abstract - The main aim of the present paper is to compute a summation formula in the light of recurrence relation and contiguous relation.

Keywords : pochhammer symbol, gaussian hypergeometric function, contiguous function, recurrence relation, bailey summation theorem and legendre duplication formula.

I. INTRODUCTION

The **Pochhammer symbol** or **generalized factorial function** or **shifted factorial** or **falling factorial** is defined by

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) ; & \text{if } n = 1, 2, 3, \dots \\ 1 & ; \text{if } n = 0 \\ n! & ; \text{if } a = 1, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1)$$

where $a \neq 0, -1, -2, \dots$ and the notation Γ stands for Gamma function. Note that $(0)_0 = 1$.

If $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ and $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ then

$$(b)_{mn} = m^{mn} \left(\frac{b}{m}\right)_n \left(\frac{b+1}{m}\right)_n \cdots \left(\frac{b+m-2}{m}\right)_n \left(\frac{b+m-1}{m}\right)_n \quad (2)$$

$$(\alpha)_{p+q} = (\alpha)_p (\alpha+p)_q = (\alpha)_q (\alpha+q)_p \quad (3)$$

$$\text{If } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \text{ then } (b)_{n-mk} = \frac{\left(\frac{-1}{m}\right)^{mk} (b)_n}{\prod_{j=1}^m \left(\frac{j-b-n}{m}\right)_k} \quad (4)$$

$$(n-mk)! = \frac{\left(\frac{-1}{m}\right)^{mk} n!}{\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{j-n}{m}\right)_k} \quad (5)$$

Author α : P.D.M College of Engineering, Bahadurgarh, Haryana, India. E-mails : sludn@yahoo.com, vsludn@gmail.com

Author σ : International Scientific Research and Welfare Organization, New Delhi, India. E-mail : mpchaudhary_2000@yahoo.com

where $[x]$ returns the largest integer less than or equal to x . In Slater's book[90], $(a)_n$ is denoted by (a, n) .

$$(b)_{-m} = \frac{\Gamma(b-m)}{\Gamma(b)} = \frac{(-1)^m}{(1-b)_m} \quad (6)$$

where, $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ and $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Some properties of the Pochhammer's symbol are given by

$$(b)_{m-n} = (b)_m (b+m)_{-n} = (b)_{-n} (b-n)_m \quad (7)$$

$$(a_1)_{M+N} (a_2)_{M+N} \cdots (a_A)_{M+N} = [(a_A)]_{M+N} = [(a_A)]_M [(a_A) + M]_N \quad (8)$$

Generalized Gaussian hypergeometric function of one variable is defined by

$${}_A F_B \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A ; \\ b_1, b_2, \dots, b_B ; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_A)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_B)_k k!}$$

or

$${}_A F_B \left[\begin{matrix} (a_A) ; \\ (b_B) ; \end{matrix} z \right] \equiv {}_A F_B \left[\begin{matrix} (a_j)_{j=1}^A ; \\ (b_j)_{j=1}^B ; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((a_A))_k z^k}{((b_B))_k k!} \quad (9)$$

where the parameters $b_1, b_2, \dots, b_B$ are neither zero nor negative integers and A, B are non-negative integers.

Contiguous Relation[E. D. p.51(10), Andrews p.363(9.16)] is defined as follows

$$(a-b) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+1, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] - b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b+1 ; \\ c ; \end{matrix} z \right] \quad (10)$$

Recurrence relation of gamma function is defined as follows

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (11)$$

Legendre duplication formula[Bells & Wong p.26(2.3.1)] is defined as follows

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{(2z-1)} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (12)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \frac{2^{(b-1)} \Gamma\left(\frac{b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma(b)} \quad (13)$$

$$= \frac{2^{(a-1)} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(a)} \quad (14)$$

Bailey summation theorem [Prud, p.491(7.3.7.8)] is defined as follows

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, 1-a \\ c \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] = \frac{\Gamma(\frac{c}{2}) \Gamma(\frac{c+1}{2})}{\Gamma(\frac{c+a}{2}) \Gamma(\frac{c+1-a}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(c)}{2^{c-1} \Gamma(\frac{c+a}{2}) \Gamma(\frac{c+1-a}{2})} \quad (15)$$

II. MAIN RESULT OF SUMMATION FORMULA

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, -a-52 \\ c \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(c)}{2^{c+52}} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{c-a+1}{2}) \Gamma(\frac{c+a+52}{2})} \left\{ \begin{aligned} & -34928139885605446284439249144578048000000a \\ & +42071734873936699642597555068454010880000a^2 \\ & -18702590782686940348571526156051922944000a^3 \\ & +3913402400021039256540281604096498585600a^4 \\ & -377223664134626507934927914708226309120a^5 \\ & +7989571832148498655051443520007784192a^6 \\ & +1174255602469543244429680529972051136a^7 \\ & -54242832591167079430159654587460224a^8 - 2099486579968189713328051113513424a^9 \\ & +100323804134273737793036422949216a^{10} + 3316399539464630274547807402916a^{11} \\ & -77628055269984184239345272344a^{12} - 3592660349233917957600756619a^{13} \\ & +2960249949153674689741751a^{14} + 1779080539870652651300486a^{15} \\ & +23016566391037776183926a^{16} - 190007431218253569349a^{17} - 7060930082730585919a^{18} \\ & -51640527170782264a^{19} + 222305063914076a^{20} + 5674507689851a^{21} + 31183770761a^{22} \\ & +19511726a^{23} - 411034a^{24} - 1339a^{25} - a^{26} + 34928139885605461795649292475564032000000c \\ & -108713895389033940384905944009117532160000ac \\ & +85667290397062545722441695887557099520000a^2c \\ & -28782401137982573090445263097848180736000a^3c \\ & +4637974251374120667580887379246239744000a^4c \\ & -316847044725090296206110319628987166720a^5c \\ & -1563857130977117303914168219615196160a^6c \\ & +1156581554571308787558041395625617536a^7c \\ & -17988204353358933679295505292192256a^8c - 2131358777381452688712214007522016a^9c \\ & +25330018423366040545047258836160a^{10}c + 2592864121485793208141761861016a^{11}c \\ & +1993426292336480580601171904a^{12}c - 1727286054597891762330490106a^{13}c \\ & -22567567093162234834920320a^{14}c + 385153303273201498890036a^{15}c \end{aligned} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +11442926416738757850624a^{16}c + 53676149546932169114a^{17}c - 1197921355762331200a^{18}c \\
& - 17815000979897264a^{19}c - 63344641295936a^{20}c + 419074409754a^{21}c + 4354571520a^{22}c \\
& + 12064676a^{23}c + 1664a^{24}c - 26a^{25}c + 66642160515097299932437200641867120640000c^2 \\
& - 123530007507285230550469913161191653376000ac^2 \\
& + 72836076162669006670353194997063853670400a^2c^2 \\
& - 19198125365308987399707077724866986229760a^3c^2 \\
& + 2390293356263580742022446233482892201984a^4c^2 \\
& - 106639869605793744113294759506075235328a^5c^2 \\
& - 4039009831177711288344135516640635648a^6c^2 \\
& + 429345120922370013590359745329345792a^7c^2 \\
& + 2924092456618390432624901233201472a^8c^2 - 717508866642990355306937873825472a^9c^2 \\
& - 5693513145785706123832854666512a^{10}c^2 + 643056911388927866162172252528a^{11}c^2 \\
& + 10438645521862608379770730924a^{12}c^2 - 236382900361254728454490208a^{13}c^2 \\
& - 7165093316952171182230168a^{14}c^2 - 12462343097414871508848a^{15}c^2 \\
& + 1493203719892310086804a^{16}c^2 + 18100386873203990784a^{17}c^2 + 1921999601483104a^{18}c^2 \\
& - 1421335537237616a^{19}c^2 - 10307915165548a^{20}c^2 - 14758519776a^{21}c^2 \\
& - 1421335537237616a^{19}c^2 - 10307915165548a^{20}c^2 - 14758519776a^{21}c^2 + 114938824a^{22}c^2 \\
& + 449904a^{23}c^2 + 364a^{24}c^2 + 56565307892909725656771291780848025600000c^3 \\
& - 76773094417412920099297189451582668800000ac^3 \\
& + 35687278744536038663635683055562391552000a^2c^3 \\
& - 7501438390916162127538789656958390763520a^3c^3 \\
& + 713943658948690921885604796252682321920a^4c^3 \\
& - 16705606842656372545944276887236804608a^5c^3 \\
& - 1728757601740457366021472945000374272a^6c^3 \\
& + 79518446332910960936680940949617664a^7c^3 \\
& + 2438341023774939799001976789424640a^8c^3 - 111938585215076302765738462154752a^9c^3 \\
& - 3040398019108634505172957171968a^{10}c^3 + 63912210513760362663127858368a^{11}c^3 \\
& + 2441885550484590174390709920a^{12}c^3 - 1565289459443957838395168a^{13}c^3 \\
& - 825533474094234334489632a^{14}c^3 - 8746168455129459827616a^{15}c^3 \\
& + 53252570814885682240a^{16}c^3 + 1580615102252764864a^{17}c^3 + 8756784251190976a^{18}c^3 \\
& - 23906001927808a^{19}c^3 - 427022916320a^{20}c^3 - 1408543136a^{21}c^3 - 486304a^{22}c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2912a^{23}c^3 + 28806016992705549602379577692946169856000c^4 \\
& -30724553168110953477991438028242126110720ac^4 \\
& +11543473055958754330580818654387350798336a^2c^4 \\
& -1945238887047803692289707223326304796672a^3c^4 \\
& +137819551621716325411463744415324315648a^4c^4 \\
& -393039136430981961339529809072310272a^5c^4 \\
& -382841780809199389444887709129580032a^6c^4 \\
& +7082850121116474548160130796313856a^7c^4 + 549886429015282966428944773052416a^8c^4 \\
& -7412569247412586213374053182464a^9c^4 - 515227991826903035055902828640a^{10}c^4 \\
& +422810709514797295299094032a^{11}c^4 + 251292999460824514220950832a^{12}c^4 \\
& +2498262451265766805892272a^{13}c^4 - 38787567775641350473808a^{14}c^4 \\
& -854071404221074696800a^{15}c^4 - 2838712550035533600a^{16}c^4 + 52246466127055200a^{17}c^4 \\
& +528037255665920a^{18}c^4 + 1175371397200a^{19}c^4 - 5047362320a^{20}c^4 - 24744720a^{21}c^4 \\
& -21840a^{22}c^4 + 9974649201644478928562193070681384550400c^5 \\
& -8640585554004126875049263445819191721984ac^5 \\
& +2656517823866208470117315410907289354240a^2c^5 \\
& -358028789774988668805264520903466483712a^3c^5 \\
& +17935286176989747076839920644418322432a^4c^5 \\
& +355442453909769139900305632836153344a^5c^5 \\
& -52527348703619549507837894069672960a^6c^5 \\
& -12505282527286290482384609319424a^7c^5 + 67454037252556288995311749430784a^8c^5 \\
& +219397818188289582098492954112a^9c^5 - 46016778963976907162308639680a^{10}c^5 \\
& -512751282416399522108759328a^{11}c^5 + 12640580059018263309525568a^{12}c^5 \\
& +267811234488316292053280a^{13}c^5 + 71398905144530071680a^{14}c^5 \\
& -36483645504193293120a^{15}c^5 - 299274518303080320a^{16}c^5 + 153769503311424a^{17}c^5 \\
& +11859338370880a^{18}c^5 + 47353386080a^{19}c^5 + 25945920a^{20}c^5 - 96096a^{21}c^5 \\
& +2517115005590931497891492998623145230336c^6 \\
& -1801853977321067526697455847041071579136ac^6 \\
& +455726047783891561444695637539919233024a^2c^6 \\
& -48674513039202158062220201546533830656a^3c^6 \\
& +1551457005425886971253405325641908224a^4c^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +80230918540267183957108427091656704a^5c^6 \\
& -4712147101722244256167890918875136a^6c^6 \\
& -80949537799940622691666899951616a^7c^6 + 5019666177104202944487903014912a^8c^6 \\
& +85093741985744014015254408192a^9c^6 - 2249284999416552541736667648a^{10}c^6 \\
& -54785553154700093310993408a^{11}c^6 + 168828804235914347452928a^{12}c^6 \\
& +13222154634544126695424a^{13}c^6 + 89440977598582365184a^{14}c^6 - 620508121535318016a^{15}c^6 \\
& -9948567588191232a^{16}c^6 - 30966082667520a^{17}c^6 + 80492572160a^{18}c^6 + 527887360a^{19}c^6 \\
& +512512a^{20}c^6 + 483660852688286891625240078330101760000c^7 \\
& -288784604406716035728339496512327254016ac^7 \\
& +60118481090561997033121611463415300096a^2c^7 \\
& -5004094739060892517426524084057931776a^3c^7 \\
& +76551424178011560809747847221084160a^4c^7 \\
& +9771940611206132232479370064297984a^5c^7 \\
& -269122974087776057073601826750464a^6c^7 \\
& -10605991732212941814282457284608a^7c^7 + 216222975061037181284162519040a^8c^7 \\
& +7841056763355733743159140352a^9c^7 - 39988601422769047492933632a^{10}c^7 \\
& -2891381923725459611166720a^{11}c^7 - 15754409471322469376000a^{12}c^7 \\
& +329321364801098768384a^{13}c^7 + 4183071746802364416a^{14}c^7 + 5107933057683456a^{15}c^7 \\
& -144795880120320a^{16}c^7 - 719320842240a^{17}c^7 - 546191360a^{18}c^7 + 1464320a^{19}c^7 \\
& +72910072727954904261408413239266508800c^8 \\
& -36474852472244870176814084621011517440ac^8 \\
& +6230093903807316255473526511485583360a^2c^8 \\
& -393300928078289324915015388951871488a^3c^8 \\
& -245793229567292484514255301705728a^4c^8 + 799639238934967152950349849649152a^5c^8 \\
& -7606812141141829899728367312896a^6c^8 - 777675120102151229229952192512a^7c^8 \\
& +2920838452302398033895211008a^8c^8 + 408858494360585773604525568a^9c^8 \\
& +2008775707935121289488896a^{10}c^8 - 86250712938197895419904a^{11}c^8 \\
& -1026703176419503458304a^{12}c^8 + 2363773427743343616a^{13}c^8 + 90598881000815616a^{14}c^8 \\
& +382403192371200a^{15}c^8 - 582581176320a^{16}c^8 - 5769054720a^{17}c^8 - 6223360a^{18}c^8 \\
& +8808137552078681935540533466234880000c^9 \\
& -3696567292216311695564223312451076096ac^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +514645272515113686120708497604608000a^2c^9 \\
& -23571768886505777039709873825906688a^3c^9 \\
& -410665195256891335924961267351552a^4c^9 + 46654013778602366582714548436992a^5c^9 \\
& +175086456157762624088271257600a^6c^9 - 37380386814276802111442378752a^7c^9 \\
& -255375608547247647698956288a^8c^9 + 13167416661772899692401664a^9c^9 \\
& +165726899232209645158400a^{10}c^9 - 1234133306569820360704a^{11}c^9 \\
& -29257328226543312896a^{12}c^9 - 86465927583107072a^{13}c^9 + 922911144263680a^{14}c^9 \\
& +5963024404480a^{15}c^9 + 5924638720a^{16}c^9 - 12446720a^{17}c^9 \\
& +866098945127345991490462081896939520c^{10} \\
& -304540958192787528223807991254614016ac^{10} \\
& +34210444420795917018750648180015104a^2c^{10} \\
& -1051162919972578994559390648631296a^3c^{10} \\
& -40452740862753606890529175142400a^4c^{10} + 1957535148502131587273684287488a^5c^{10} \\
& +30955880629946654663058505728a^6c^{10} - 1197689504016564723322109952a^7c^{10} \\
& -19567007151200547456337920a^8c^{10} + 239699190978762219454464a^9c^{10} \\
& +5663934258171762253824a^{10}c^{10} + 5531597422827700224a^{11}c^{10} \\
& -449979323218833408a^{12}c^{10} - 2598360857444352a^{13}c^{10} + 1827158581248a^{14}c^{10} \\
& +36921950208a^{15}c^{10} + 44808192a^{16}c^{10} + 70109291045124599110797036093440000c^{11} \\
& -20585488425827118622084793353895936ac^{11} \\
& +1839284676392222644345529010487296a^2c^{11} \\
& -32104767303759400473777376591872a^3c^{11} - 2425300840370989085217474478080a^4c^{11} \\
& +56782379857751913335173152768a^5c^{11} + 1744924437647444656236920832a^6c^{11} \\
& -23329310065210776143462400a^7c^{11} - 717794312475266872934400a^8c^{11} \\
& +875768454359933681664a^9c^{11} + 112018680236419547136a^{10}c^{11} \\
& +572194842565312512a^{11}c^{11} - 3278505479208960a^{12}c^{11} - 29741407567872a^{13}c^{11} \\
& -37736644608a^{14}c^{11} + 65175552a^{15}c^{11} + 4710548327431316893912148004044800c^{12} \\
& -1148847980873950647299179345346560ac^{12} \\
& +80040811817187427090064048390144a^2c^{12} - 445178481287516116952381652992a^3c^{12} \\
& -10364984330024916074523656192a^4c^{12} + 951878152127688583736393728a^5c^{12} \\
& +61469093240338376246198272a^6c^{12} - 134527445288024271601664a^7c^{12} \\
& -16428668892122988560384a^8c^{12} - 72880540472360484864a^9c^{12} \\
& +1274999648575930368a^{10}c^{12} + 10554547802652672a^{11}c^{12} + 299058020352a^{12}c^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -148806647808a^{13}c^{12} - 206389248a^{14}c^{12} + 264182165001061306106113949696000c^{13} \\
& -53130599487870584319708942565376ac^{13} + 2807478336028208943889142251520a^2c^{13} \\
& +15260030937719821979130789888a^3c^{13} - 3296550171202035393192787968a^4c^{13} \\
& -1789093359265617298718720a^5c^{13} + 1487778203438940404776960a^6c^{13} \\
& +6856149763792731078656a^7c^{13} - 239627967825216208896a^8c^{13} \\
& -2022962169603981312a^9c^{13} + 6320432896081920a^{10}c^{13} + 94010016694272a^{11}c^{13} \\
& +151584964608a^{12}c^{13} - 222265344a^{13}c^{13} + 12409623398297151947688965570560c^{14} \\
& -2038774563971023546676188020736ac^{14} + 78487220724481205883124056064a^2c^{14} \\
& +1273595162606966064093855744a^3c^{14} - 78517680522797909434433536a^4c^{14} \\
& -637343656812366102528000a^5c^{14} + 24837835829205411430400a^6c^{14} \\
& +242999004100263936000a^7c^{14} - 2009348138467983360a^8c^{14} - 26665802013081600a^9c^{14} \\
& -20998994657280a^{10}c^{14} + 392457093120a^{11}c^{14} + 635043840a^{12}c^{14} \\
& +488921602091245066382213120000c^{15} - 64844547829545383354062340096ac^{15} \\
& +1708414248369719055006826496a^2c^{15} + 48031603574786883105849344a^3c^{15} \\
& -1372860739785057558855680a^4c^{15} - 20665870381655345070080a^5c^{15} \\
& +268665255592101150720a^6c^{15} + 4136583940998168576a^7c^{15} - 4898824708423680a^8c^{15} \\
& -192540211937280a^9c^{15} - 398807531520a^{10}c^{15} + 508035072a^{11}c^{15} \\
& +16146436103803194911280332800c^{16} - 170333566305929323746426880ac^{16} \\
& +27507095999231071735513088a^2c^{16} + 1224788724185037710032896a^3c^{16} \\
& -16556221196935418609664a^4c^{16} - 391199492197226840064a^5c^{16} \\
& +1453031658295590912a^6c^{16} + 42188713936158720a^7c^{16} + 72116213514240a^8c^{16} \\
& -686799912960a^9c^{16} - 1333592064a^{10}c^{16} + 445740409937736947990528000c^{17} \\
& -36713644648914482370707456ac^{17} + 282998508385046888448000a^2c^{17} \\
& +22756221968652276596736a^3c^{17} - 111606022601557671936a^4c^{17} \\
& -4897159164517810176a^5c^{17} - 3911355444756480a^6c^{17} + 254487543152640a^7c^{17} \\
& +696605736960a^8c^{17} - 784465920a^9c^{17} + 10233486366213291208867840c^{18} \\
& -642792585013175240359936ac^{18} + 554395334287545073664a^2c^{18} \\
& +312141351192959647744a^3c^{18} + 135529805017513984a^4c^{18} - 40588106321100800a^5c^{18} \\
& -123641939886080a^6c^{18} + 790044344320a^7c^{18} + 1917583360a^8c^{18} \\
& +193822750054704742400000c^{19} - 9006573823915181735936ac^{19} \\
& -40689982723550347264a^2c^{19} + 3113529551389458432a^3c^{19} + 11592014254571520a^4c^{19} \\
& -209294333050880a^5c^{19} - 800136888320a^6c^{19} + 807403520a^7c^{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2992860241094036684800c^{20} - 98819016954688307200ac^{20} - 842719940499734528a^2c^{20} \\
& +21682030516371456a^3c^{20} + 119353052758016a^4c^{20} - 573821681664a^5c^{20} \\
& -1857028096a^6c^{20} + 37037875694403584000c^{21} - 821933144230854656ac^{21} \\
& -9220521208053760a^2c^{21} + 97319414398976a^3c^{21} + 580453924864a^4c^{21} - 530579456a^5c^{21} \\
& +358292072043642880c^{22} - 4926934588850176ac^{22} - 61881771360256a^2c^{22} \\
& +238471348224a^3c^{22} + 1157627904a^4c^{22} + 2608521543680000c^{23} - 19531632214016ac^{23} \\
& -240987930624a^2c^{23} + 201326592a^3c^{23} + 13435194572800c^{24} - 43201331200ac^{24} \\
& -419430400a^2c^{24} + 43620761600c^{25} - 33554432ac^{25} + 67108864c^{26} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\frac{c-a}{2}) \Gamma(\frac{c+a+53}{2})} \left\{ 199999709752403580401723552207732736000000 \right. \\
& \quad -377591849263958499693767992175103836160000a \\
& \quad +236178499610888430069672185198072020992000a^2 \\
& \quad -67290223958711336049088671025057983283200a^3 \\
& \quad +9174565960972243229229632317889447362560a^4 \\
& \quad -454011662043974405665799107718370637824a^5 \\
& \quad -19007341816349550298046336565703395840a^6 \\
& +2306333878665685107004618164151025472a^7 +15598565297982051344305671336513216a^8 \\
& -4996696802847303378983268654015472a^9 - 39640383655090290519295793600656a^{10} \\
& +6076260431496166202628862874492a^{11} + 107617375492357100570273102276a^{12} \\
& -3263674121769242212100525677a^{13} - 110771538150352696821002641a^{14} \\
& -118002054074797779098758a^{15} + 37006109991536463476426a^{16} \\
& +537950317559878419053a^{17} - 359007056164719391a^{18} - 80542804789151848a^{19} \\
& -793098224405344a^{20} - 1487999580067a^{21} + 24813226529a^{22} + 188133842a^23 + 450866a^{24} \\
& -13a^{25} - a^{26} + 522166060729665280421696827332954685440000c \\
& -745176201564121598450537124560894951424000ac \\
& -745176201564121598450537124560894951424000ac \\
& +372441555493300344163325262554055927398400a^2c \\
& -85354773266725179427212478848054782853120a^3c \\
& +8958598012505868389788671447791655886848a^4c \\
& -234502861644000249860202534560809949184a^5c \\
& -27077713961678368732885244204595571200a^6c \\
& +1432156101427259175387016604121472896a^7c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +48373234567272598677839596362380672a^8c - 2671779229139060300259058269517728a^9c \\
& - 80271109381094535586859369741280a^{10}c + 2146824446409929307930188618536a^{11}c \\
& + 91457104835611657890691200232a^{12}c - 171288518581722035632148038a^{13}c \\
& - 46965112857488579600370160a^{14}c - 580709973511112714028084a^{15}c \\
& + 5364676043590544129592a^{16}c + 186209518476106290022a^{17}c + 1318543083159976960a^{18}c \\
& - 6301160011713424a^{19}c - 150822856992808a^{20}c - 812684971098a^{21}c - 424572720a^{22}c \\
& + 11103196a^{23}c + 35464a^{24}c + 26a^{25}c + 559236019293629113772855437019672739840000c^2 \\
& - 637724196527259483026982345192120778752000ac^2 \\
& + 260152072026883978151846635023139333079040a^2c^2 \\
& - 48157827422365046321683686498664849784832a^3c^2 \\
& + 3788447493746015685412651874412604919808a^4c^2 \\
& - 12557813441544352864441620309497398272a^5c^2 \\
& - 13344606072760031475468745436139845376a^6c^2 \\
& + 289519294327574428251634196660470528a^7c^2 \\
& + 24948277948518264814402797406247744a^8c^2 \\
& - 415978283450986149308638903746240a^9c^2 - 31879638346793643414710599244240a^{10}c^2 \\
& + 61694532595820165339877883344a^{11}c^2 + 22572467936644951504370566828a^{12}c^2 \\
& + 255655896536005122768371488a^{13}c^2 - 5573490785959241092209496a^{14}c^2 \\
& - 146528598112733273847696a^{15}c^2 - 559131740284799998316a^{16}c^2 \\
& + 16855156515546615552a^{17}c^2 + 230600014236825376a^{18}c^2 + 723575163399088a^{19}c^2 \\
& - 6151367250028a^{20}c^2 - 57945215328a^{21}c^2 - 151491704a^{22}c^2 + 4368a^{23}c^2 + 364a^{24}c^2 \\
& + 343745761995310316138295779696817733632000c^3 \\
& - 321970786125310756170650899719291540602880ac^3 \\
& + 108363272317825774175239394945898909794304a^2c^3 \\
& - 16157482482561003074249702023477494546432a^3c^3 \\
& + 904981825394887777539320992568223006720a^4c^3 \\
& + 20132854200151641860676569770012360704a^5c^3 \\
& - 3415550824215825904835884830157647872a^6c^3 \\
& + 948011229616276402960785012065280a^7c^3 \\
& + 5836912754919624233629249046018560a^8c^3 + 17877245263222213216874630272000a^9c^3 \\
& - 5573832084370741404915824871936a^{10}c^3 - 70168802606418423531863259840a^{11}c^3 \\
& + 2311833564751397883528302880a^{12}c^3 + 57936227825788902844995104a^{13}c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -19938247346110460493984a^{14}c^3 - 13626103943575502711904a^{15}c^3 \\
& -144973907328968386240a^{16}c^3 + 177790107683329856a^{17}c^3 + 13134015010660544a^{18}c^3 \\
& + 85791249351808a^{19}c^3 + 82212210080a^{20}c^3 - 1139922784a^{21}c^3 - 3969056a^{22}c^3 \\
& - 2912a^{23}c^3 + 139785198927482868063794720396462260224000c^4 \\
& - 109173173021313754888459746835882064216064ac^4 \\
& + 30455002938983618463476272302355817693184a^2c^4 \\
& - 3624217259083503339262545206067485048832a^3c^4 \\
& + 130119533127769112006348630356027858944a^4c^4 \\
& + 7632382041245288606301248360679745536a^5c^4 \\
& - 518401907834902510539658057519831552a^6c^4 \\
& - 10001437828631166082823116232867072a^7c^4 + 752144322857775632084699243943424a^8c^4 \\
& + 14510952962549839158735858596352a^9c^4 - 487827716938432211835757884960a^{10}c^4 \\
& - 13899152796106319306786601744a^{11}c^4 + 64023388782947130398961008a^{12}c^4 \\
& + 5426726276158304621327824a^{13}c^4 + 45450057566720371385392a^{14}c^4 \\
& - 480834911205568851360a^{15}c^4 - 10287195780452242080a^{16}c^4 - 46372969999356000a^{17}c^4 \\
& + 233013036576320a^{18}c^4 + 2897260366000a^{19}c^4 + 8332083760a^{20}c^4 - 240240a^{21}c^4 \\
& - 21840a^{22}c^4 + 40681751115001572401733970907717210996736c^5 \\
& - 26714387971908730288588668082712142151680ac^5 \\
& + 6179145817699090115382316658387732398080a^2c^5 \\
& - 577273811552809028353769819290954039296a^3c^5 \\
& + 10032948122586384491208691220425064448a^4c^5 \\
& + 1464757153698071641970857847580758016a^5c^5 \\
& - 47246767030294558595596816821806080a^6c^5 - 2132876053859894219443804790744576a^7c^5 \\
& + 53225798483767880802768984580608a^8c^5 + 2238444805272791926270321801728a^9c^5 \\
& - 15491460511256179463144738880a^{10}c^5 - 1264570711617178070890398432a^{11}c^5 \\
& - 8133580172902124992507456a^{12}c^5 + 246631048417597220497120a^{13}c^5 \\
& + 4073449634771775223680a^{14}c^5 + 5685270617461680960a^{15}c^5 - 318113537996462208a^{16}c^5 \\
& - 2584761338263104a^{17}c^5 - 3625048947520a^{18}c^5 + 34197523360a^{19}c^5 + 130882752a^{20}c^5 \\
& + 96096a^{21}c^5 + 8903223567519743387702209716616414887936c^6 \\
& - 4936219104808499733342488455607167746048ac^6 \\
& + 943853294857844113376090076675415474176a^2c^6 \\
& - 67399517200360358744975163084433522688a^3c^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -45605686474587315122577598754914304a^4c^6 \\
& +181297147263341880893680990656544768a^5c^6 \\
& -2076275942741651866003322856677376a^6c^6 \\
& -242834108832615668654984388812800a^7c^6 + 1217326407853692029020146802688a^8c^6 \\
& +187067019122621610817147290624a^9c^6 + 1049805904697378625497605632a^{10}c^6 \\
& -63236130792116837027945472a^{11}c^6 - 948069003545306674071040a^{12}c^6 \\
& +3460910865451680729088a^{13}c^6 + 16594983333622733824a^{14}c^6 \\
& +1027158317193136128a^{15}c^6 - 3042388046810112a^{16}c^6 - 55627391339520a^{17}c^6 \\
& -177751974400a^{18}c^6 + 5125120a^{19}c^6 + 512512a^{20}c^6 \\
& +1515332346475072855114721196047440281600c^7 \\
& -710260970242735595762239511459102982144ac^7 \\
& +111576607064744818979817081214213292032a^2c^7 \\
& -5830171914831627911203476179118981120a^3c^7 \\
& -116893690819599805259224915551191040a^4c^7 \\
& +15576168780138353899100270419902464a^5c^7 \\
& +63891191306042096044455949926400a^6c^7 \\
& -17670667345729860248639456051200a^7c^7 \\
& -139179818681872201228839567360a^8c^7 + 9474915388447178435578355712a^9c^7 \\
& +146388854199104017293551616a^{10}c^7 - 1530591600194794297645056a^{11}c^7 \\
& -46651339381319232102400a^{12}c^7 - 182971317567662514176a^{13}c^7 \\
& +3298243020196540416a^{14}c^7 + 34781366180081664a^{15}c^7 + 65605466234880a^{16}c^7 \\
& -468992409600a^{17}c^7 - 1992939520a^{18}c^7 - 1464320a^{19}c^7 \\
& +205438151531261673767145944387262873600c^8 \\
& -81331336018663685396130552289662337024ac^8 \\
& +10397506457289655507842207224756174848a^2c^8 \\
& -367988270320855707131768715374100480a^3c^8 \\
& -16473826829500841135438762134896640a^4c^8 \\
& +946527318674394719712900327972864a^5c^8 + 17552787850771789036593291649024a^6c^8 \\
& -846756040769966544657515851776a^7c^8 - 16706572158606020126100707328a^8c^8 \\
& +271798445023534711704254976a^9c^8 + 8086731761738607429044736a^{10}c^8 \\
& +7945250659821441128448a^{11}c^8 - 1260090039292461684736a^{12}c^8 \\
& -10734519211374486528a^{13}c^8 + 15648993424137216a^{14}c^8 + 540380298332160a^{15}c^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1942584483840a^{16}c^8 - 56010240a^{17}c^8 - 6223360a^{18}c^8 \\
& +22577836076655706876453878687198085120c^9 \\
& -7528753230455776073622670732781682688ac^9 \\
& +772789322062858943834472430006435840a^2c^9 \\
& -15716087550232477055391879715880960a^3c^9 \\
& -1396084805675292699731447893196800a^4c^9 + 39452916767577845058592104562688a^5c^9 \\
& +1450054250612407655185502371840a^6c^9 - 24708328979924498535337238528a^7c^9 \\
& -937131869377024327275855872a^8c^9 + 1833355161347541457939456a^9c^9 \\
& +260688832085355357798400a^{10}c^9 + 1821669143804462977024a^{11}c^9 \\
& -17081985599504809984a^{12}c^9 - 251574335376652288a^{13}c^9 - 615747403448320a^{14}c^9 \\
& +3543481610240a^{15}c^9 + 16927539200a^{16}c^9 + 12446720a^{17}c^9 \\
& +2037782135705176067711310194928517120c^{10} \\
& -569793844326570866079762456141365248ac^{10} \\
& +46090425606451459990677670412681216a^2c^{10} \\
& -304209930754329399595924536950784a^3c^{10} \\
& -83868587535772482425348489773056a^4c^{10} + 954934393548964169573733236736a^5c^{10} \\
& +74533497156301163834728562688a^6c^{10} - 230306275439180664968724480a^7c^{10} \\
& -32997165873735978321758208a^8c^{10} - 188666147369246744051712a^9c^{10} \\
& +4996217131620058865664a^{10}c^{10} + 61143325089304313856a^{11}c^{10} \\
& -9762816729329664a^{12}c^{10} - 3026129252450304a^{13}c^{10} - 12432600440832a^{14}c^{10} \\
& +358465536a^{15}c^{10} + 44808192a^{16}c^{10} + 152502945700414880139177560218009600c^{11} \\
& -35536494144245885679643339421384704ac^{11} \\
& +2206697710293075281261636937056256a^2c^{11} \\
& +14118569543018918924825049169920a^3c^{11} - 3749879776551751008983659315200a^4c^{11} \\
& -1656085257943166428054290432a^5c^{11} + 2648823398131666821616631808a^6c^{11} \\
& +15172062593733085529309184a^7c^{11} - 756558245660168386805760a^8c^{11} \\
& -8830270003914949165056a^9c^{11} + 45039527989949595648a^{10}c^{11} \\
& +1072951308819726336a^{11}c^{11} + 3371343490744320a^{12}c^{11} - 16235512430592a^{13}c^{11} \\
& -88573575168a^{14}c^{11} - 65175552a^{15}c^{11} + 9528996414921318868341984172441600c^{12} \\
& -1835736931253921638166112967327744ac^{12} \\
& +84230015569542559757953402929152a^2c^{12} + 1644865313578967661710323744768a^3c^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -126291814767927434121536208896a^4c^{12} - 1265233503121112490816241664a^5c^{12} \\
& + 65970289874813137486446592a^6c^{12} + 851648177190694783664128a^7c^{12} \\
& - 10404250386688062734336a^8c^{12} - 203705788082788712448a^9c^{12} \\
& - 235284702223613952a^{10}c^{12} + 10453899609194496a^{11}c^{12} + 50107388018688a^{12}c^{12} \\
& - 1444724736a^{13}c^{12} - 206389248a^{14}c^{12} + 499449706225226909826165149532160c^{13} \\
& - 78752571133957968722050246770688ac^{13} + 2515119599058559842755207495680a^2c^{13} \\
& + 86736118424560097458906988544a^3c^{13} - 3161160586838072858315587584a^4c^{13} \\
& - 60906398366128428283985920a^5c^{13} + 1095434877030957892567040a^6c^{13} \\
& + 23381921084010119593984a^7c^{13} - 47490543525098225664a^8c^{13} \\
& - 2820529517926514688a^9c^{13} - 11462683879342080a^{10}c^{13} + 47457429454848a^{11}c^{13} \\
& + 301836337152a^{12}c^{13} + 222265344a^{13}c^{13} + 22017811906854510322306420572160c^{14} \\
& - 2806382504474260293901109690368ac^{14} + 56114056200198328788635877376a^2c^{14} \\
& + 3130227668566099474800181248a^3c^{14} - 55744217498585353130868736a^4c^{14} \\
& - 1746759006684340448133120a^5c^{14} + 9627703692985367920640a^6c^{14} \\
& + 406844682258068275200a^7c^{14} + 1108341754219069440a^8c^{14} - 22975600361472000a^9c^{14} \\
& - 132151988060160a^{10}c^{14} + 3810263040a^{11}c^{14} + 635043840a^{12}c^{14} \\
& + 817035530887402535876401561600c^{15} - 82889552973985223208362573824ac^{15} \\
& + 815118236417071270749798400a^2c^{15} + 83942160722637478791479296a^3c^{15} \\
& - 571605198342643441991680a^4c^{15} - 34446359088247708057600a^5c^{15} \\
& - 35428116169757294592a^6c^{15} + 4613271914955669504a^7c^{15} + 24896517801246720a^8c^{15} \\
& - 90394680360960a^9c^{15} - 689403592704a^{10}c^{15} - 508035072a^{11}c^{15} \\
& + 25492842205893327557597593600c^{16} - 2019148311322882102037315584ac^{16} \\
& + 2535685215177442083209216a^2c^{16} + 1710864058321963742134272a^3c^{16} \\
& + 742952151893710995456a^4c^{16} - 478301608597548761088a^5c^{16} \\
& - 2379403980560990208a^6c^{16} + 32165836060753920a^7c^{16} + 231267090432000a^8c^{16} \\
& - 6667960320a^9c^{16} - 1333592064a^{10}c^{16} + 666730090433021767780925440c^{17} \\
& - 40228619723623414689169408ac^{17} - 238088094223184953344000a^2c^{17} \\
& + 26459036472899161030656a^3c^{17} + 144718677935497150464a^4c^{17} \\
& - 4566197464639340544a^5c^{17} - 34538024132935680a^6c^{17} + 111663493939200a^7c^{17} \\
& + 1063735787520a^8c^{17} + 784465920a^9c^{17} + 14536732947779318909501440c^{18} \\
& - 647212691205599241699328ac^{18} - 7677439917877812527104a^2c^{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +304500878910237442048a^3c^{18} + 2766935258250870784a^4c^{18} - 27750913550581760a^5c^{18} \\
& - 266034009866240a^6c^{18} + 7670333440a^7c^{18} + 1917583360a^8c^{18} \\
& + 262033355840517937561600c^{19} - 8248049013151460491264ac^{19} \\
& - 138248122329271894016a^2c^{19} + 2500195370064150528a^3c^{19} + 29581529862635520a^4c^{19} \\
& - 86195977584640a^5c^{19} - 1094031769600a^6c^{19} - 807403520a^7c^{19} \\
& + 3858185886371518873600c^{20} - 80838990711104733184ac^{20} \\
& - 1685561728040960000a^2c^{20} + 13437282599043072a^3c^{20} + 193225630416896a^4c^{20} \\
& - 5571084288a^5c^{20} - 1857028096a^6c^{20} + 45608006280785428480c^{21} \\
& - 580593322943315968ac^{21} - 14239028215808000a^2c^{21} + 37761870462976a^3c^{21} \\
& + 718404583424a^4c^{21} + 530579456a^5c^{21} + 422097512279572480c^{22} - 2792162232107008ac^{22} \\
& - 80301946568704a^2c^{22} + 2315255808a^3c^{22} + 1157627904a^4c^{22} + 2944226924953600c^{23} \\
& - 7164273885184ac^{23} - 272394878976a^2c^{23} - 201326592a^3c^{23} + 14547523993600c^{24} - 419430400ac^{24} \\
& - 419430400a^2c^{24} + 45365592064c^{25} + 33554432ac^{25} + 67108864c^{26} \Big\} \quad (16)
\end{aligned}$$

Derivation of main result

Substituting $b = -a - 52$, $z = \frac{1}{2}$ in given result (10), we get

$$\begin{aligned}
& (2a + 52) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a & , & -a - 52 \\ c & & \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] \\
& = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a + 1 & , & -a - 52 \\ c & & \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] + (a + 52) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a & , & -a - 51 \\ c & & \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

Now involving the derived result of Ref[6], we can prove the main result.

REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. Andrews, L.C.(1992) ; *Special Function of mathematics for Engineers,second Edition*, McGraw-Hill Co Inc., New York.
2. Bells, Richard, Wong, Roderick ; *Special Functions , A Graduate Text*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2010.
3. Lebedev, N.N.(1965) ; *Special Functions and their applications*, Printice-Hall Inc., New York.
4. Mathai, A.M.,Haubold , Hans J.(2008) ; *Special Functions for Applied Scientists*, Springer, New York.
5. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.; *Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions*. Nauka, Moscow, 1986. Translated from the Russian by G.G. Gould, Gordon and Breach Science Publishers, New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1990.

6. Rainville, E.D.(1960) ; *Special Functions* , The Macmillan Company, New York.
7. Salahuddin, Chaudhary, M.P ; A New Summation Formula Clung to Contiguous relation, *Global Journal of Science Frontier Research(F)*, 13(2013),27- 39.

Notes

