



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH: F
MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES
Volume 22 Issue 5 Version 1.0 Year 2022
Type: Double Blind Peer Reviewed International Research Journal
Publisher: Global Journals
Online ISSN: 2249-4626 & Print ISSN: 0975-5896

The Effect of Vibration on the Sediment of the Bases of Turbine Units

By Sh. Altynbekov

South Kazakhstan State Pedagogical University

Abstract- The paper presents a mathematical model of the problem of assessing the effect of vibration on the sediment of the bases of turbine units of a built array of hereditarily aging heterogeneous two-phase soil. The constructed model takes into account the distribution of the vibration wave in the soil mass, the initial porosity coefficient is assumed to be a variable value depending on spatial coordinates. For the initial conditions of the problem, solutions of the Laplace equation in the corresponding boundary conditions are accepted. The solution of the boundary value problem is found by methods of applied mathematics and mathematical physics. The sediment of the bases of turbine units was determined by the method of V. A. Florin. Preliminary calculations confirmed the possibility of a significant impact of vibration on the sediment of the bases of turbine units.

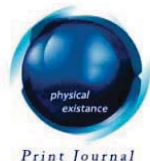
Keywords: vibration, sediment of turbine unit bases, reliability, iteration and approximation methods.

GJSFR-F Classification: DDC Code: 330.028 LCC Code: HB139



Strictly as per the compliance and regulations of:





The Effect of Vibration on the Sediment of the Bases of Turbine Units

Sh. Altynbekov

Abstract- The paper presents a mathematical model of the problem of assessing the effect of vibration on the sediment of the bases of turbine units of a built array of hereditarily aging heterogeneous two-phase soil. The constructed model takes into account the distribution of the vibration wave in the soil mass, the initial porosity coefficient is assumed to be a variable value depending on spatial coordinates. For the initial conditions of the problem, solutions of the Laplace equation in the corresponding boundary conditions are accepted. The solution of the boundary value problem is found by methods of applied mathematics and mathematical physics. The sediment of the bases of turbine units was determined by the method of V. A. Florin. Preliminary calculations confirmed the possibility of a significant impact of vibration on the sediment of the bases of turbine units.

Keywords: vibration, sediment of turbine unit bases, reliability, iteration and approximation methods.

I. Введение

Одним из стихийных бедствий в большой степени зависит от вибрационного состояния турбоагрегатов атомной электростанции, от связующих веществ в составе грунта и от распределения вибрационной волны в грунтовом массиве. В зависимости от них вибрационное воздействие на характер деформации плотно уплотненных грунтов может быть малосущественным, существенным, разрушительным. Этому вопросу при различных постановках посвящена множество работ. Проведение первых детальных исследований процесса разжижения песчаных грунтов, их консолидации и динамического уплотнения взрывным методом началось под руководством проф. П.Л. Иванова (Иванов, 1983). Эти исследования базировались на теории консолидации, созданной проф. В.А.Флориным (Флорин 1961). За рубежом, в особенности в США и Японии, ведутся масштабные исследования явления разжижения грунтов оснований и сооружений (Seed 1982, Idriss 2008, Boulanger 2017, Ishihara 2016, Towhata 2015, Kokusho 2015). Данные исследования проводилась в США проф. Seed Н. В. и были продолжены его учениками проф. I. М. Idriss и проф. R. W. Boulanger (Idriss 2008, Boulanger 2017). Многолетние исследования проф. К. Ishihara (Япония) были обобщены ученым в монографии «Поведение грунтов при землетрясениях», (СПб., 2006, пер. на рус. яз.) (Ishihara 2006). М. Ю. Абелев (Абелев 1983) описал методы проектирования, строительства и эксплуатации промышленных и гражданских сооружений на слабых водо-насыщенных глинистых грунтах. В работе рассмотрены методы оценки свойств указанных грунтов, а также методы проектирования и

Author: South Kazakhstan State Pedagogical University. e-mail: sh.altynbekov@mail.ru

устройства различных видов искусственных оснований и пределы применимости различных методов уплотнения грунтов в зависимости от свойства оснований конструкции сооружений. А. Л. Гольдин, С. Р. Месчан, Г.Ф. Рустамян (Гольдин, Месчан, Рустамян 1985) решили плоской задачи консолидации водонасыщенного глинистого грунта с учетом вибрационной ползучести скелета, при пренебрежении сжимаемости твердых частиц и поровой воды и изменяемость коэффициента фильтрации. Для решения этой задачи использовано обычное уравнение плоской задачи фильтрационной консолидации. При выводе общего уравнения вибрационной консолидации грунтового основания с учетом вибрационной ползучести скелета его мера представлена в виде произведения меры статические ползучести и функции амплитуды колебания. С. Я. Кушнир (Кушнир 1988) исследовала консолидационные явления в торфяных грунтах при динамических воздействиях. Л.Б. Маслов (Маслов 2012) рассмотрел теоретические вопросы расчета вынужденных гармонических колебаний пористых структур в насыщенных жидкостью. Показано, что с увеличением частоты возбуждения эффект инерционного взаимодействия фаз поропругого материала становится весьма существенным, особенно для амплитуд давления жидкости в порах. В статье О.П. Минаева (Минаев 2018) приведены результаты теоретического обоснования на примере разработанной аналитической расчетной модели и полевых испытаний метода глубинного виброуплотнения оснований. Ш.Алтынбеков (Алтынбеков 2016, 2018) сформулировал многопараметрической математической модели задачи вибрационной консолидации соленых и несоленых грунтов. Исследовал вопросы существования и единственности. Обосновал методы решения. Задача сводится к конечно – разностной краевой задаче, для которой исследована погрешность локально – одномерной схемы. Даны априорные оценки и ее решения. Приведены результаты предварительных расчетов. В статьях Гейдт (2018а и 2018 б) решение уравнения консолидации получено без каких-либо дополнительных допущений кроме учета начальных условий. Решение показывает, что после выключения вибрационного воздействия отсутствует какой-либо остаточный эффект влияния вибрационного воздействия. Е. С. Соболев (Соболев 2014), А.З. Тер-Мартirosян (Тер-Мартirosян 2010). Е.Л. Усошина (Усошина 2016) внесли определенные вклады в повышения надежности работы оснований зданий и сооружений.

Анализ существующих работ привел к следующему выводу: характер влияния вибрационных воздействий на уплотнение грунта является очень сложным и недостаточно исследованным. Пути исследователи столкнулись с целым рядом серьезных проблем, связанных главным образом с не изученностью динамического воздействия на процесс консолидации связных грунтов.

Фундамент турбоагрегатов атомной электростанций представляют собой сложную конструкцию, включающую нижнюю фундаментную плиту, систему колонн-стоек и систему верхних ригелей. Жесткие крепления вала-провода системы «турбина-генератор» в подшипниках допускают весьма малое смещение опор подшипников и таким образом накладывают жесткие ограничения на прогибы нижних фундаментных плит. Современные технические условия ограничивают эти прогибы величинами

1/10000 длины фундаментной плиты для турбоагрегатов мощностью до 300 мВт. В случае строительства атомных электростанции наглинистых водо-насыщенных основаниях в результате процессов консолидации и ползучести скелета грунта имеет место нарастание прогибов фундаментов во времени, которое необходимо прогнозировать для оценки надежности турбоагрегатов. Надежность турбоагрегатов в значительной мере определяется их вибрационным состоянием и характером уплотнения грунтовых оснований. При неравномерной осадке грунтовых оснований возникает неуравновешенная центробежная сила, что не желательно на практике. При столь малых величинах допускаемых прогибов возникает необходимость в разработке совершенных методов расчета, в которых с наибольшей полнотой учитывались бы реальные свойства глинистых грунтов. До настоящего времени во всех существующих исследованиях начальный коэффициент пористости считался постоянной величиной. В действительности он не является постоянной величиной, он зависит от пространственных координат. Это утверждение особенно верно, когда изучаемые объекты являются неоднородной пористой средой. Не исследовано влияние переменной начального коэффициента пористости на характер уплотнения грунтов. В расчетах недостаточно изучены влияния параметров неоднородности, степени физической нелинейности, краевых условий, переменной коэффициентов фильтрации, бокового давления, мгновенного уплотнения и начального коэффициента пористости на характер вибрационной консолидации грунтов. Как известно, воздействия вибрации приводит к дополнительным остаточным осадкам. Грунт испытывает вибрационный эффект и со временем в зависимости от физико – механических свойств, амплитудой и частотой колебаний могут плотно уплотняться. Влияние вибрации на деформации плотных уплотненных грунтов изучено недостаточно полно. В работах (Гольдин, Месчан, Рустамян 1985), (Алтынбеков 2016, 2018) при учете вибрационной ползучести скелета грунта, функция, характеризующая деформации ползучести представлены в виде произведение меры статической ползучести и функции амплитуды колебаний. Возможность такой постановки вопроса ограничено. Распределение волн вибрации в грунтовых основаниях остается в тени. В работе все эти вопросы находит свои ответы. С целью теоретического исследования данных вопросов рассмотрим следующую задачу.

II. Постановка Задачи.

Рассмотрим уплотнение земляной среды, находящееся под действием распределенной нагрузки с интенсивностью q . Чтобы изучить этот процесс, позвольте:

- Грунт состоит из твердой и жидкой фаз.
- Модуль деформации грунта и коэффициент бокового давления в процессе уплотнения изменяются по глубине соответственно с законами:

$$E(x_3) = E_0(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3})^{-1},$$

$$a(x_3) = \frac{1}{E(x_3)} = a_0(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}), \quad (1)$$

$$\xi(x_3) = \xi_0 e^{-\alpha_4 x_3} \quad (2)$$

где $E_0, a_0, \xi_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - опытные данные,

- Уравнение состояния скелета грунта представлено в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_1) - \frac{1}{1 + (n-1)\xi(x)} \cdot \left\{ a(x_3)\theta(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(t)K(t, \tau, x, \theta(t))d\tau \right\} \quad (3)$$

$$K(t, \tau, x, \theta(t)) = \eta(x) \frac{f(\tau, \theta(\tau))}{\theta(\tau)} * \frac{\partial C(t, \tau, \theta(\tau))}{\partial \tau}, \quad (4)$$

Сумма главных нормальных напряжений (гипотеза Флорин1961) определена в виде

$$\theta(x, t) = n\gamma(H_0(x) - H(x, t)) \quad (5)$$

Функция $C(t, \tau, \theta(\tau))$ в (4), характеризующая деформации вибрационной ползучести скелета грунта, аппроксимирована выражением

$$C(t, \tau, \theta(\tau)) = \varphi(\tau, \theta(\tau))(t - \tau)^{\tilde{m}} U(x, t), \tilde{m} > 1, \quad (6)$$

Функция $\eta(x)$, характеризующая коэффициент деформации ползучести принята в виде

$$\eta(x) = \alpha_5 + \alpha_6 e^{-\alpha_7 x_3} \quad (7)$$

Функция $f(\tau, \theta(\tau))$, входящая в (4), представлена в следующем виде:

$$f(\tau, \theta(\tau)) = \beta_1(\tau)\theta(\tau) + \beta_2(\tau)\theta^m(\tau), m > 0 \quad (8)$$

В качестве функции старения предложены:

$$\varphi(\tau, \theta(\tau)) = C_0 + \frac{A_k}{\tau^k + B_k \theta(\tau)} \quad (9)$$

$$\beta_1(\tau) = \beta_{10} + \frac{\beta_{11}}{\tau^k + \beta_{12}}, \beta_2(\tau) = \beta_{20} + \frac{\beta_{21}}{\tau^k + \beta_{22}}, k > 0 \quad (10)$$

Начальный коэффициент включен в (3) представлена в следующем виде:

$$\varepsilon(x_1) = \alpha_8 ch(\alpha_9 x_1) \cdot \alpha_{10} ch(\alpha_{11} x_2) \cdot \alpha_{12} e^{-\alpha_{13} x_3}, \quad (11)$$

$$0 < \alpha_8 < 1, 0 < \alpha_9 < 1, 0 < \alpha_{10} < 1, 0 < \alpha_{11} < 1,$$

$$0 < \alpha_{12} < 1, 0 < \alpha_{13} < 1$$

Здесь $\varepsilon(t)$ - коэффициент пористости; $\varepsilon(\tau_1)$ - начальный коэффициент пористости; τ - возраст скелета грунта; $n = 1, 2, 3$ в зависимости от мерности рассматриваемой задачи; γ - удельный вес воды; $H_0(x), H(x, t)$ - функции напоров; $x = (x_1, x_2, x_3)$ - пространственные координаты; C_0 - предельное значение меры ползучести; A_k, B_k - некоторые параметры, зависящие от свойства и условий старения среды; $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \tilde{m}, m, k, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}$ - опытные данные.

- Коэффициент фильтрации линейно зависит от коэффициента пористости

$$K_s = K_{0s} + K_{1s}\varepsilon(x, t), s = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где $K_{0s} > 0, K_{1s} > 0$ - опытные данные.

- Уплотнение грунта подчинена модели (Терцаги 1933)- (Флорина 1948)
- На поверхности земной породы происходит переменный водо-обмен с окружающей средой.

Тогда математическая модель вибрационной консолидации неоднородного грунта в области $\Omega_\infty = G \times (t, \infty)$ описывается в следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = C_v(x_3) \sum_{s=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \left((K_s(x, \tau, t, H_0, U, H)) \frac{\partial H}{\partial x_s} \right) + \\ + C_1(x, \tau, t, H_0, U, H) = L(H), \quad x, t \in \Omega_\infty = G \times (t, \infty), \end{aligned} \quad (13)$$

$$G = (-l_1 \leq x_1 \leq l_1, -l_2 \leq x_2 \leq l_2, 0 \leq x_3 \leq h)$$

$$H|_{t=\tau_1} = H_0(x), \quad x \in G, \quad (14)$$

$$\chi_1^{(1)} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \chi_1^{(2)} H|_{x_1=-l_1} = \psi_1(x_2, x_3, t), \quad \chi_1^{(3)} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \chi_1^{(4)} H|_{x_1=l_1} = \psi_2(x_2, x_3, t), \quad (15)$$

$$\chi_2^{(1)} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \chi_2^{(2)} H|_{x_1=-l_2} = \psi_3(x_1, x_3, t), \quad \chi_2^{(3)} \frac{\partial H}{\partial x_2} + \chi_2^{(4)} H|_{x_1=l_2} = \psi_4(x_1, x_3, t), \quad (16)$$

$$\chi_3^{(1)} \frac{\partial H}{\partial x_3} - \chi_3^{(2)} H|_{x_3=0} = \psi_5(x_1, x_2, t), \quad \chi_3^{(3)} \frac{\partial H}{\partial x_3} + \chi_3^{(4)} H|_{x_3=h} = \psi_6(x_1, x_2, t), \quad (17)$$

Здесь

$$C_v(x_3) = \frac{(1+\varepsilon_{cp})(1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3})}{3\alpha_0 \gamma (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3})}, \quad (18)$$

$\chi_n^{(\alpha)}$ и $\chi_n^{(\alpha+1)}$ ($\alpha=1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3$) - коэффициенты водоотдачи, удовлетворяющие условиям: $\chi_n^{(\alpha)} \geq 0, \chi_n^{(\alpha+1)} \geq 0, (\chi_n^{(\alpha)})^2 + (\chi_n^{(\alpha+1)})^2 \neq 0$ для любого $x \in G$; $\psi(x, t)$ -напор водоносного горизонта, прилегающего к рассматриваемой территории; виды

функций $C_1(x, \tau, t, H_0, U, H)$, $K_s(x, \tau, t, H_0, U, H)$ ($s = 1, 2, 3$) в (13) определяются зависимостями (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) и (12). Эти функции непрерывны и ограничены.

Следует отметить, что функция $H_0(x)$ в (5) и (14), то есть

$$H_0(x) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} D_{0i_1i_2} \left(\cos \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 + B_{1i_1} \sin \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 \right) \times \\ \times \left(\cos \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 + B_{2i_2} \sin \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 \right) \cdot \\ \left(ch \sqrt{\frac{v_{i_1}^2 + \rho_{i_2}^2}{K_{13}}} x_3 + B_{3i_1i_2} sh \sqrt{\frac{v_{i_1}^2 + \rho_{i_2}^2}{K_{13}}} x_3 \right) \quad (19)$$

решение задачи

$$K_{01} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} + K_{02} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} + K_{03} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} = 0, x \in G \\ \chi_1^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial x_1} - \chi_1^{(2)} H_0|_{x_1=-\ell_1} = 0, \quad \chi_1^{(3)} \frac{\partial H_0}{\partial x_1} + \chi_1^{(4)} H_0|_{x_1=\ell_1} = 0, \\ \chi_2^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} - \chi_2^{(2)} H_0|_{x_2=-\ell_2} = 0, \quad \chi_2^{(3)} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} + \chi_2^{(4)} H_0|_{x_2=\ell_2} = 0, \\ \chi_3^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial x_3} - \chi_3^{(2)} H_0|_{x_3=0} = 0, \\ \chi_3^{(3)} \frac{\partial H_0}{\partial x_3} + \chi_3^{(4)} H_0|_{x_3=h} = \frac{q}{\gamma}, \quad |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, \\ \chi_3^{(3)} \frac{\partial H_0}{\partial x_3} + \chi_3^{(4)} H_0|_{x_3=h} = 0,$$

где D_{1ij}, B_{1i}, B_{2j} и F_{ij} – известные коэффициенты, определяемые в процессе решения задачи, μ_{1i}, μ_{2i} – положительные корни уравнения вида

$$ctg \mu = \frac{\chi_s^{(1)} \chi_s^{(3)} \frac{\mu^2}{4l_s^2} - \chi_s^{(2)} \chi_s^{(4)}}{(\chi_s^{(1)} \chi_s^{(4)} + \chi_s^{(2)} \chi_s^{(3)}) \frac{\mu}{4l_s}}, \quad s = 1, 2; \quad (20)$$

Функция $U(x, t)$ в (6)

$$U(x, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} (\tilde{A}_{i_1i_2i_3} \cos \pi \tilde{l}_{i_1i_2i_3} a_0 t + \tilde{B}_{i_1i_2i_3} \sin \pi \tilde{l}_{i_1i_2i_3} a_0 t) \times$$

$$\times \left(\cos \frac{\tilde{\nu}_{i_1}}{\sqrt{K_1}} x_1 + \tilde{B}_{1i_1} \sin \frac{\tilde{\nu}_{i_1}}{\sqrt{K_2}} x_1 \right) \times \left(\cos \frac{\tilde{\rho}_{i_2}}{\sqrt{K_2}} x_2 + \tilde{B}_{2i_2} \sin \frac{\tilde{\rho}_{i_2}}{\sqrt{K_2}} x_2 \right) \tilde{V}_{\nu_{i_1 i_2}} \left(\frac{2\tilde{\lambda}_{i_1 i_2 i_3}}{\tilde{\alpha} \sqrt{K_3}} e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{2} x_3} \right) \quad (21)$$

решение задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a_0^2 e^{-\tilde{\alpha} x_3} \left(K_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + K_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + K_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} \right)$$

$$U(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x)$$

$$\tilde{\chi}_1^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_1} - \tilde{\chi}_1^{(2)} U|_{x_1=-\ell_1} = 0, \tilde{\chi}_1^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \tilde{\chi}_1^{(4)} U|_{x_1=\ell_1} = 0,$$

$$\tilde{\chi}_2^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \tilde{\chi}_2^{(2)} U|_{x_2=-\ell_2} = 0, \tilde{\chi}_2^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \tilde{\chi}_2^{(4)} U|_{x_2=\ell_2} = 0,$$

$$\tilde{\chi}_3^{(1)} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \tilde{\chi}_3^{(2)} U|_{x_3=0} = 0, \tilde{\chi}_3^{(3)} \frac{\partial U}{\partial x_3} + \tilde{\chi}_3^{(4)} U|_{x_3=h} = 0,$$

Здесь: $\tilde{A}_{i_1 i_2 i_3}, \tilde{B}_{1i_1}, \tilde{B}_{2i_2}$ - известные коэффициенты, определяемые из начальных и граничных условий; $\tilde{V}_{\nu_{i_1 i_2}}(x_3)$ - функция состоящая из комбинации функций Бесселя первого и второго рода индекса $\nu_{i_1 i_2}$; $\tilde{\lambda}_{i_1 i_2 i_3}$ - положительные корни уравнения, составленного из комбинаций этих функций; $\tilde{\nu}_{i_1}, \tilde{\rho}_{i_2}$ - положительные корни уравнения вида (20); K_s ($s = 1, 2, 3$) - коэффициенты, характеризующие сопротивление пористой среды движущихся волн; $\tilde{\chi}_n^{(\alpha)}$ и $\tilde{\chi}_n^{(\alpha+1)}$ ($\alpha = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$) - коэффициенты волно отдачи, удовлетворяющие условиям: $\tilde{\chi}_n^{(\alpha)} \geq 0, \tilde{\chi}_n^{(\alpha+1)} \geq 0, (\tilde{\chi}_n^{(\alpha)})^2 + (\tilde{\chi}_n^{(\alpha+1)})^2 \neq 0$ для любого $x \in G$; уравнения

$$K_3 Z''(x_3) + \left(\tilde{\lambda}^2 e^{-\tilde{\alpha} x_3} - (\tilde{\nu}^2 + \tilde{\rho}^2) \right) Z(x_3) = 0$$

последовательным введением новых переменных (Коренев 1960)

$$y = -\frac{\tilde{\alpha}}{2h} x_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{4h^2 \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\alpha}^2 K_3} \text{ и } z = e^y$$

приведено к уравнению Бесселя (Коренев 1971), общее решение которого известно; ортогональность функций $\left\{ \tilde{V}_{\nu_{i_1 i_2}}(x_3) \right\}$ с весом $e^{-\tilde{\alpha} x_3}$ очевидно и не требуется в доказательстве.

III. Существование И Единственность Решения

Теорема 3.1.

Пусть $C_\nu(x_3), C_1(x, \tau, t, H_0, U, H), K_s(x, \tau, t, H_0, U, H)$ ($s = 1, 2, 3$) - положительные функции класса $C^2(x \in G, 0 \leq \tau_1 \leq t < T < \infty) \cap C(Q_\infty)$, функция $H(x, t)$ удовлетворяет

уравнению (12) в Q_∞ , начальному условию (13) и граничным условиям (14), (15), (16) и $L(H) \geq 0 (L(H) \leq 0)$ в Q_∞ , функция $H_0(x)$ содержится в области определения оператора Лапласа. Тогда задача (13), (14), (15), (16), (17) имеет единственное решение. Это решение непрерывно зависит от начальных и граничных данных, параметров коэффициентов фильтрации, мгновенного уплотнения и бокового давления, а также свободного элемента.

Доказательство теоремы 3.1 приводится по той же схеме, что и доказательство теоремы приведенной в работах В. С. Владимиров 26, В. Я. Арсенина 27, Ш. Алтынбекова 28, 29, 30. В доказательстве учтены: свойства параметров уравнение состояние среды (4); гипотеза В.А.Флорина (5); условия гладкости и условие согласованности; принципы максимума и минимума; теоремы С. Банаха и разложения по собственным функциям; признаки сходимости мажорируемых рядов. В ходе доказательства подтверждено физически очевидный факт, что давление в поровой жидкости движется только из мест с высоким давлением в место с более низким давлением.

IV. Методы Решения Задачи.

Существует многочисленные методы расчетов фильтрации жидкости 31, 32, 33, 34, 35. и фильтрационной консолидации грунтов 15, 16, 36, 37, 38, 39, 40, 41. Здесь предпочтение отдается итерационному методу, методу введения новой неизвестной функции, методу преобразования неоднородных граничных условий в однородные, методу Фурье, методу аппроксимации, методу введения новых переменных и теореме разложения по собственным функциям.

Представим итерационный метод в виде теоремы.

Теорема 4.1 (метод итерации).

Пусть выполняются условия теоремы 3.1. $H(x, t)$ – решение задачи (13), (14), (15), (16), (17) и $H_k(x, t) (k=1, 2, 3, \dots)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = C_v(x_3) \cdot \left(K_{11} \frac{\partial^2 H_k}{\partial x_1^2} + K_{12} \frac{\partial^2 H_k}{\partial x_2^2} + K_{13} \frac{\partial^2 H_k}{\partial x_3^2} \right) + \Phi_{k-1}(x, t),$$

$$k=1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

удовлетворяющие начальным (14) и граничным условиям (15), (16), (17), и $H > H_1$. Тогда последовательность $\{H_k\}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) при $k \rightarrow \infty$ сходится к единственному решению $H(x, t)$ задачи (13), (14), (15), (16), (17).

Функция $\Phi_{k-1}(x, t)$, $k=1, 2, 3, \dots$ в (21) определяется зависимостями (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) и (11) и является непрерывным и ограниченным.

Доказательство. Рассуждения, аналогичные (Алтынбеков 2018) и использует принцип максимума и теоремы сравнения. Согласно теореме 3.1 задачи (13), (14), (15), (16), (17) и (21), (14), (15), (16), (17) имеют единственные решения. В соответствии

с принципом максимума, гипотезы В.А.Флорина (5) и теоремы сравнения для этих решений, имеем

$$H_1 \leq H_3 \leq H_2 \leq H_5 \leq H_4 \leq \dots \leq H_{2k+1} \leq H_{2k},$$

отсюда, перенумеровав их $H_1 = U_1$, $H_3 = U_2$, $H_2 = U_3$, ..., имеем $U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq \dots \leq U_{2k-1} \leq U_{2k}$ или $U_{2k} \geq H_1 \leq H$.

Следовательно, последовательность $\{H_k\}$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к решению $H(x, t)$ задачи (13), (14), (15), (16), (17). Теорема доказана.

Метод введения новой неизвестной функции. Метод преобразования неоднородных граничных условий в однородные.

Введем новую неизвестную функцию $W_k(x, t)$

$$H_k(x, t) = \psi(x, t) + W_k(x, t), \quad k=1,2,3,\dots, \quad (23)$$

Эта функция является отклонением от известной функции $\psi(x, t)$ и будет определена как решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k}{\partial t} = C_v(x_3) \cdot \left(K_{11} \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_1^2} + K_{12} \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_2^2} + K_{13} \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_3^2} \right) + \\ + \Phi_{1,k-1}(x, t, \Phi_{k-1}(x, t)), \quad k=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (24)$$

с однородными граничными условиями

$$\chi_1^{(1)} \frac{\partial W_k}{\partial x_1} - \chi_1^{(2)} W_k|_{x_1=-l_1} = 0, \quad \chi_1^{(3)} \frac{\partial W_k}{\partial x_1} + \chi_1^{(4)} W_k|_{x_1=l_1} = 0, \quad (25)$$

$$\chi_2^{(1)} \frac{\partial W_k}{\partial x_2} - \chi_2^{(2)} W_k|_{x_2=-l_2} = 0, \quad \chi_2^{(3)} \frac{\partial W_k}{\partial x_2} + \chi_2^{(4)} W_k|_{x_2=l_2} = 0, \quad (26)$$

$$\chi_3^{(1)} \frac{\partial W_k}{\partial x_3} - \chi_3^{(2)} W_k|_{x_3=0} = 0, \quad \chi_3^{(3)} \frac{\partial W_k}{\partial x_3} + \chi_3^{(4)} W_k|_{x_3=h} = 0, \quad (27)$$

и с начальным условием

$$W_k(x, \tau_1) = H_0(x) - \psi(x, \tau_1). \quad (28)$$

Представляя функцию $\psi(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \left(\alpha_1^{(1)} x_1 + \beta_1^{(1)} \right) \left(\chi_1^{(1)} + \psi_1(x_2, x_3, t) \right) + \left(\alpha_2^{(1)} x_1 + \beta_2^{(1)} \right) \times \\ \times \left(\chi_1^{(3)} + \psi_2(x_2, x_3, t) \right) + \left(\alpha_1^{(2)} x_2 + \beta_1^{(2)} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\chi_2^{(1)} + \psi_3(x_1, x_3, t)) + (\alpha_2^{(2)} x_2 + \beta_2^{(2)}) (\chi_2^{(3)} + \psi_4(x_1, x_3, t)) + \\ & + (\alpha_1^{(3)} x_3 + \beta_1^{(3)}) (\chi_3^{(1)} + \psi_5(x_1, x_2, t)) + (\alpha_2^{(3)} x_3 + \beta_2^{(3)}) (\chi_3^{(3)} + \psi_6(x_1, x_2, t)) \quad (29) \end{aligned}$$

требуем, она удовлетворяла условиям видов (15), (16) и (17). Тогда коэффициенты в (29) однозначно определяются

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= \frac{\chi_1^{(4)}}{\chi_1^*}, \quad \beta_1^{(1)} = \frac{\chi_1^{(3)} + \chi_1^{(4)}}{\chi_1^*}, \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{\chi_1^{(2)}}{\chi_1^*}, \quad \beta_2^{(1)} = \frac{\chi_1^{(1)} + \chi_1^{(2)}}{\chi_1^*}, \\ \alpha_1^{(2)} &= \frac{\chi_2^{(4)}}{\chi_2^*}, \quad \beta_1^{(2)} = \frac{\chi_2^{(3)} + \chi_2^{(4)}}{\chi_2^*}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{\chi_2^{(2)}}{\chi_2^*}, \quad \beta_2^{(2)} = \frac{\chi_2^{(1)} + \chi_2^{(2)}}{\chi_2^*}, \\ \alpha_1^{(3)} &= \frac{\chi_3^{(4)}}{\chi_3^*}, \quad \beta_1^{(3)} = \frac{\chi_3^{(3)} + \chi_3^{(4)}}{\chi_3^*}, \quad \alpha_2^{(3)} = \frac{\chi_3^{(2)}}{\chi_3^*}, \quad \beta_2^{(3)} = \frac{\chi_3^{(1)}}{\chi_3^*}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1^* &= \chi_1^{(2)} \chi_1^{(3)} + 2\chi_1^{(2)} \chi_1^{(4)} + \chi_1^{(1)} \chi_1^{(4)}, \\ \chi_2^* &= \chi_2^{(2)} \chi_2^{(3)} + 2\chi_2^{(2)} \chi_2^{(4)} + \chi_2^{(1)} \chi_2^{(4)}, \\ \chi_3^* &= \chi_3^{(2)} \chi_3^{(3)} + \chi_3^{(2)} \chi_3^{(4)} + \chi_3^{(1)} \chi_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Метод Фурье. Метод аппроксимации. Метод введения новых переменных.

Пусть для начала:

$$\Phi_{1,k-1}(x, t, \Phi_{k-1}(x, t,)) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Тогда, согласно вышеуказанным методам, решение задачи (27), (28), (29), (30), (31) нетрудно представить так

$$\begin{aligned} W_k(x, t) &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} D_{ki_1i_2i_3} \left(\cos \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 + B_{1i_1} \sin \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 \right) \times \\ &\times \left(\cos \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 + B_{2i_2} \sin \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 \right) \times V_{vi_1i_2} \left(\frac{2\lambda_{i_1i_2i_3}}{\alpha \sqrt{K_{13}}} e^{-\frac{\alpha}{2} x_3} \right) \cdot e^{-\lambda_{i_1i_2i_3} t}, \quad k \in N \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь $D_{ki_1i_2i_3}$ – известные коэффициенты, определяемые в процессе решения задачи; $V_{vi_1i_2}(x_3)$ – функция, состоящая из комбинации функций Бесселя первого и второго рода индекса $v_{i_1i_2}, \lambda_{i_1i_2i_3}$; – положительные корни уравнения, состоящие из этих комбинаций.

Для решения задачи (24), (25), (26), (27), (28), здесь мы использовали метод аппроксимации. В соответствии с этим методом функция $1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}$ в (18) заменяется функцией $\tilde{\xi}(x_3)$:

$$\tilde{\xi}(x_3) = (1 + 2\xi_0) \exp\left(\left(\ln \frac{1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 h}}{1+2\xi_0}\right) \cdot \frac{x_3}{h}\right),$$

функция $\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}$ в (18) заменяется функцией $\tilde{a}(x_3)$:

$$\tilde{a}(x_3) \approx (\alpha_1 + \alpha_2) \exp\left(\left(\ln \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h}}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \cdot \frac{x_3}{h}\right), \text{ т.е.}$$

$$1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3} \approx (1 + 2\xi_0) \exp\left(\left(\ln \frac{1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 h}}{1+2\xi_0}\right) \cdot \frac{x_3}{h}\right), \quad (31)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3} \approx (\alpha_1 + \alpha_2) \exp\left(\left(\ln \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h}}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \cdot \frac{x_3}{h}\right). \quad (32)$$

Далее, принимая во внимание (31) и (32), функция $\frac{1+2\xi_0 \exp(-\alpha_4 x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 \exp(-\alpha_3 x_3)}$ в (18) заменяется функцией $\tilde{C}_v(x_3)$:

$$\frac{1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}} \approx \frac{1+2\xi_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \exp\left(\left(\ln \frac{(1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 h})(\alpha_1 + \alpha_2)}{(1+2\xi_0)(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h})}\right) \cdot \frac{x_3}{h}\right). \quad (33)$$

Легко заметить, что при $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ аппроксимация (36) абсолютно точна, и при $\alpha_3, \alpha_4 \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю. Она для малых значений α_3 и α_4 вполне допустимо в практических расчетах.

Далее, учитывая (33), последовательно вводим новых переменных

$$y = -\frac{\alpha}{2h} x_3 + \frac{1}{2} \ln \frac{4h^2 \lambda^2}{\alpha^2 K_{13}} \text{ и } z = e^y$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$K_{13} Z''(x_3) + (\lambda^2 e^{-\alpha x_3} - (v^2 + \rho^2) Z(x_3)) = 0$$

легко сводится к уравнению Бесселя (Коренев 1971), общее решение которого известно. Здесь

$$\alpha = \ln \frac{(1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 h})(\alpha_1 + \alpha_2)}{(1+2\xi_0)(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h})} / h.$$

Метод разложений в собственных функциях и решение задачи.

Пусть теперь :

$$\Phi_{1,k-1}(x, t, \Phi_{k-1}(x, t)) \neq 0, \quad k=1,2,3,\dots$$

Предполагаем, что непрерывная функция $\Phi_{1,k-1}(x, t, \Phi_{k-1}(x, t))$ имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка по x , и для этой функции при всех $t \geq \tau_1 > 0$ выполняется все условия типа (25), (26), (27). Тогда решение задачи (24), (25), (26), (27), (29) можно представить так

$$W_k(x, t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} T_{ki_1i_2i_3}(t) \left(\cos \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 + B_{1i_1} \sin \frac{v_{i_1}}{\sqrt{K_{11}}} x_1 \right) \times \\ \times \left(\cos \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 + B_{2i_2} \sin \frac{\rho_{i_2}}{\sqrt{K_{12}}} x_2 \right) \cdot V_{vi_1i_2} \left(\frac{2\lambda_{i_1i_2i_3}}{\alpha \sqrt{K_{13}}} e^{-\frac{\alpha}{2} x_3} \right), \quad (34)$$

$$T_{ki_1i_2i_3}(t) = \left(\int \Phi_{1ki_1i_2i_3}^*(t) \cdot e^{\lambda_{i_1i_2i_3}^2 t} dt + D_{ki_1i_2i_3} \right) e^{-\lambda_{i_1i_2i_3}^2 t}.$$

Поставляя ряд (34) в (23) и учитывая (29), при $k \rightarrow \infty$ получим решение задачи (13), (14), (15), (16), (17).

Следствие. Если водопроницаемость грунта в направлении оси x_1 (оси x_2) пренебрежимо мала, то легко проверить, что собственные значения v_{i_1} (ρ_{i_2}), характеризующие уровни пьезометрических напоров, равны нулю, а соответствующие им собственные функции, являющиеся волновыми функциями дифференциального оператора второго порядка, равны единице. В этом случае легко получить решение плоской краевой задачи из решения (37), и аналогично одномерной задачи.

V. Определение Осадок Оснований Турбоагрегатов.

Согласно методу, приведенному в работе (Флорин 1961) и полученных результатов (19), (23), (34), нетрудно определить осадок грунтового основания, вызванный нагрузкой q :

$$s_k(t) = \frac{3\gamma a_0}{1+\varepsilon_0} \int_0^h \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}}{1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}} (H_0(x) - H_k(x, t)) dx_3. \quad (35)$$

Предварительные расчеты по формуле (35) показали:

- Нагрузка, приложенная на верхнюю поверхность слоя массива земляной среды, со временем передается к его скелету.
- При больших значениях параметра α_3 и малых значениях параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ уплотнение грунта не зависит от времени. Вибрационное уплотнение старого неоднородного грунта не зависит от времени, зависит от пространственных координат.
- С увеличением коэффициента бокового давления уменьшается осадок грунтовых оснований.
- Осадок слоя неоднородных грунтовых оснований с возрастанием параметров α_3 и α_7 увеличивается, а затем постепенно уменьшается.
- Возраст скелета достаточно заметно влияет на характер осадки грунтовых оснований. Это влияние может быть мало существенным только при $A_k, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21} \rightarrow 0$
- В начальные моменты времени вибрационное воздействие на ползучесть скелета водонасыщенного глинистого грунта наиболее ярко проявляется, а со временем становится мало заметным.
- Осадок неоднородных грунтовых оснований сильно зависит от типа граничных условий. В зависимости от них происходит обратный процесс уплотнения-набухания грунта.
- Вибрационное уплотнение сильно зависит от степени влажности грунта и вяжущих веществ в почве, параметров ползучести, статической нагрузки, амплитуды и частоты колебаний. В зависимости от них, при применении модернизированного

вибрационного уплотнителя можно уменьшить разницу значений пористости по глубине уплотняемого основания и тем самым значительно улучшить равномерность уплотнения грунта. При этом можно достигнут значительное увеличение механических характеристик мелких и средних грунтов оснований.

VI. Заключение

Вибрационное воздействие на характер деформации плотно уплотненных грунтов зависит от вибрационного состояние турбоагрегата и от связующих веществ в составе грунта. В зависимости от них вибрационное воздействие на характер деформации плотно уплотненных грунтов может быть мало существенным, существенным, разрушительным. Всеми этими процессами можно управлять. Вопрос: как управлять – это вопрос завтрашнего дня. Работа посвящена одному из недостаточно изученных вопросов вибрационной консолидации неоднородных грунтов. Приводится новая математическая постановка задачи. Исследованы вопросы существования и единственности для нее. Обоснованы методы решения. Обоснованные методы аппроксимации и итерации являются новым вкладом в прикладную механику грунтов. Применение их позволяет изучить более сложные проблемы теории консолидации неоднородных грунтов.

Полученные результаты (19),(21),(29),(34) и формула расчета (35) дает нам возможность количественного и качественного анализа в оценке влияния вибрации на осадок оснований турбоагрегатов и сооружений.

REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. Абелев М. Ю. (1983). *Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах*. Москва, Стройиздат. 248 с.
2. Sh. Altynbekov. (2016). Mathematical Statement and Methods of Solution of the Vibro-consolidation Problem for Salty Soils. *J. of Math. Sciences. Springer.* – NY: 219 (1), p. 1-13. DOI 10.1007/S10958-016-3078-3
3. Ш. Алтынбеков. (2018). Многопараметрическая математическая модель процесса консолидации неоднородных грунтов. *Математическое моделирование*. Том 30, №10, с. 44-66. DOI 10.31857/S023408790001920-6
4. Boulanger R.W., M. Khosvari, A. Khosvari, D.W. Wilson, A. Pulido and W. Yunlong. (2017). «Remediation of liquefaction effects for a dam using soil-cement grids: Centrifuge and numerical modeling». *Proceedings of the 19th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Seoul, Korea – pp. 2477-2480
5. Гейдт В.Д., Гейдт Л.В., Гейдт А.В. (2018а). Влияние на консолидацию грунта дополнительной динамической нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону. IV международная научно-практическая молодежная конференция по геотехнике. *Сборник материалов*, Тюменский индустриальный университет. г. Тюмень. с.10-14.
6. Гейдт В.Д., Гейдт Л.В., Гейдт А.В. (2018b). Моделирование процесса консолидации водонасыщенной среды, подвергнутый глубинному осесимметричному вибродействию. IV международная научно-практическая молодежная конференция по геотехнике. *Сборник материалов*, Тюменский индустриальный университет. г. Тюмень. с.14-18.
7. Гольдин А.Л., Месчан С.Р., Рустамян Г.Ф. (1985). Плоская задача виброконсолидации водонасыщенного грунта. *Докл. АН Арм. ССР.*, 80, №2. с.78-81.
8. Ivanov P. L. (1983) *Uplotnenienesvyaznykhgruntovvzryvami*. М.: Nedra, 230 с.
9. Idriss I. M., and R. W. Boulanger (2008). *Soil liquefaction during earthquakes*. USA, California: EERI – 240 p.

10. Ishihara K. (2006). *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnic. Monograph*. USA, Oxford: Clarendon Press, - 384 p.
11. Kokusho T. (2015) «Energy-based liquefaction potential compared with stress-based evaluation». *Sixth International Geotechnical Symposium on Disaster Miltigation in Special Geoenvironmental Conditions, IGS-Chennai, January 21-23*, - IIT Madras, Chennai, India, pp.9-18.
12. Коренев Б.Г. (1960). *Некоторые задачи упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях*, -М.: Физматгиз. 458 с.
13. Коренев Б.Г. (1971). *Введение в теорию бесселевых функций*. –М.: Наука, 287 с.
14. Кушнир С.Я. (1988). Консолидационные явления в торфяных грунтах при динамических воздействиях – В книге. *Материалы Балтийской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. Строительство на торфах и деформации сооружений на сильносжимаемых грунтах*. – Таллин, с. 210-213.
15. Маслов Л.Б. (2012). Исследование вибрационных характеристик пороупругих механических систем. *Изв. РАН.МТТ.№2*, с. 78-92.
16. Minaev Oleg P. (2018). «Improvement of operational safety and reliability of port hydrotechnical structures to the liquefaction of sand soils of the bases by a new vibration method depth compaction». *Vestnik Gosudarstvenno gouniversitetamors kogoirechnog oflotaimeniadmirala S.O. Makarova* 10.1: pp.106-121. DOI: 10.21821/2309-5180-2018-10-1-106-121
17. Seed H.B. and I.M.Idriss(1982).*Ground motions and soil liquefaction during earthquakes. Monograph/H. B. Seed, I. M. Idriss*. – USA, Oakland, C.A.: Earthquake Engineering Research Institute – 320 p.
18. Соболев Е.С. (2014). Ползучесть и виброползучестьпесчаных грунтов оснований зданий и сооружений. *Диссер... кан...тех... наук*. Москва. 150 с.
19. Терцаги К. (1933). *Строительная механика грунта*.Госстройиздат, 392 с.
20. Тер-Мартirosян А.З. (2010). Взаимодействия фундаментов с основанием при циклических и вибрационных воздействиях с учетом реологических свойств грунтов. *Диссер... кан...тех... наук*. М.:190 с.
21. Towhata I. (2015). On ageing of liquefaction resistance of sand / I.Towhata, S.Goto, Y.Taguchi, T.Hayashida, Y.Hamada // *Japanese Geotechnical Society Special Publication*. – Vol.2.-Is.21.pp. 800-805. DOI: 10.3205/jgssp.JPN-072.
22. Усошина Е.А. (2016). Численно-аналитические методы моделирования динамических систем с пористыми неоднородными основаниями. *Диссер... кан...тех... наук*.Ростов-на-Дону, 134 с.
23. Флорин В.А. (1948). *Теория уплотнения земляных масс*. М.: - 284 с.
24. Florin V.A. and P.L.Ivanov (1961). «Liquefaction of Saturated Sandy Soils». *Proceeding of the Y International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Vol.1. Paris, pp.182-186.
25. Флорин В.А. (1961). *Основы механики грунтов*. М.: Госстройиздат, Т.2. 543 с.
26. В.С.Владимиров.Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.
27. В.Я.Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984, 384 с.
28. Ш. Алтынбеков. Вопросы существования, единственности и корректности для нелинейной краевой задачи механики уплотняемых сред. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1985, деп. рукоп. №3297, 16 с.
29. Ш. Алтынбеков. Краевые задачи консолидации неоднородных грунтов. *Диссер... кан...физико-матем...наук*. Ташкент, 1992, 157 с.

30. Ш. Алтынбеков. О разрешимости краевой задачи механики уплотняемых сред. Вестник международного казахско - турецкого университета им. Х.А. Ясауи, Туркистан. №2, (2007), с. 92-100.
31. М.С. Белоцерковская, А.М. Опарин, Б.Н. Четверушкин. Использование вложенных сеток для моделирования процесса фильтрации. Математическое моделирование, **16**, 12, (2004), 3-10.
32. Б.Н. Четверушкин, Д.Н. Морозов, М.А. Трапезникова, Н.Г. Чурбанова, Е.В. Шальников. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации. Математическое моделирование, **22**, 4, (2010), 99-109.
33. П.Н. Вабищевич. Явно-неявные вычислительные алгоритмы для задач многофазной фильтрации. Математическое моделирование, **22**, 4, (2010), 118-128.
34. В.М. Максимов. Обобщенный закон многофазной фильтрации и «перекрестные» эффекты при вытеснении нефти водой. Математическое моделирование, **27**, 11, (2015), 21-31.
35. В.И. Дарищев, В.И. Кокорев, А.М. Полищук, О.В. Чубанов, С.Е. Якуш. Моделирование фильтрационных процессов при циклической эксплуатации нефтяной скважины. Математическое моделирование, **28**, 5, (2016), 69-80.
36. М.И. Дроботенко, А.Д. Ляшко. Приближенное решение задачи фильтрационной консолидации, изв. Вузов, математика, **3**, (1992), 3-6.
37. М.И. Дроботенко, А.В. Костерин. Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации, ДАН СССР, **350**, 5, (1996), 619-621.
38. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Ф. Лисбона. Разностные схемы для задач фильтрационной консолидации. Докл. РАН, **376**, 4, (2001), 454-457.
39. А.П. Власюк, П.Н. Мартынюк. Фильтрационная консолидация трехфазных грунтов с учетом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме. Математическое моделирование, **22**, 4, (2010), 32-56.
40. О.П. Мичута, А.П. Власюк, П.Н. Мартынюк. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях. Математическое моделирование, **25**, 2, (2013), 3-18.
41. П.Н. Мартынюк. Решение краевых задач для систем квазилинейных параболических уравнений сеточными и безсеточными численными методами. Сиб. Электрон. Матем. изв., **11**, (2014). 476-493.