



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH: F  
MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES  
Volume 23 Issue 2 Version 1.0 Year 2023  
Type: Double Blind Peer Reviewed International Research Journal  
Publisher: Global Journals  
Online ISSN: 2249-4626 & Print ISSN: 0975-5896

# Ordinary Differential Equations with an Approach in the Numerical Study of Malaria: SIR Model

By Anastácio Pascoal Epandi Canhanga

*Instituto Superior Politécnico do Bié*

**Abstract-** The present investigation aims to numerically predict cases of infections and recoveries from malaria in the city of Cuito, for which differential equations were used with which it was possible to study the behavior of the variables that affect the dynamics of malaria. Based on the infection and recovery variables, as well as the constant rates of infections, recoveries and deaths, analyzing the links between the same variables, the SIR endemic model was chosen, which allowed achieving the objective announced here. The study was based on data from a period when cases of this disease were already slowing down. The Runge-Kutta method was used to predict numbers of malaria cases. The results showed exactly what was expected to be the decrease in cases in this period and not only, the power of the model used was verified, as well as its usefulness.

**Keywords:** ordinary differential equations, SIR model, malaria, runge-kutta method.

**GJSFR-F Classification:** MSC 2010: 12H20



*Strictly as per the compliance and regulations of:*





# Ordinary Differential Equations with an Approach in the Numerical Study of Malaria: SIR Model

Ecuaciones diferenciales ordinarias con enfoque en el estudio numérico de la malaria: modelo SIR

Anastácio Pascoal Epandi Canhanga

**Resumen-** La presente investigación tiene como objetivo predecir numericamente los casos de infección y recuperación de la malaria en la ciudad del Cuito, utilizando ecuaciones diferenciales con los cuales se permita evaluar el comportamiento de las variables que afectan esta enfermedad. Teniendo en cuenta las variables de infección y recuperación, así como las tasas constantes de recuperación, infección y muerte, analizando la conexión entre estas variables así, como sus respectivas proporciones, se ha elegido el modelo endémico SIR que permitió lograr el dicho objetivo. Es-te estudio se basó en datos de un período en el que la disminución de infecciones palúdicas se registra. En ese contexto, se utilizó el método de Runge-Kutta para predecir números de infecciones en los meses de invierno en Angola, utilizando como datos de referencia inicial los de mayo en la ciudad de Cuito, capital de la provincial del Bié, Angola. Los resultados ilustran el poder y utilidad del modelo endémico SIR en los problemas de evoluciones, especialmente los epidemiológicos, bien como la sincronía en las variables.

**Palabras-clave:** ecuaciones diferenciales ordinarias, modelo SIR, malaria, méeto-do de runge-kutta.

**Abstract-** The present investigation aims to numerically predict cases of infections and recoveries from malaria in the city of Cuito, for which differential equations were use with which it was possible to study the behavior of the variables that affect the dynamics of malaria. Based on the infection and recovery variables, as well as the constant rates of infections, recoveries and deaths, analyzing the links between the same variables, the SIR endemic model was chosen, which allowed achieving the objective announced here. The study was based on data from a period when cases of this disease were already slowing down. The Runge-Kutta method was used to predict numbers of malaria nos. The results showed exctly what was expected to be the decrease in cases in this period an not only, the power of the model used was verified, as well as its usefulness.

**Keywords:** ordinary differential equations, SIR model, malaria, runge-kutta method.

## I. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales, como se las conoce, nos ofrecen una amplia gama de aplicaciones en diferentes áreas[1], lo que trae cada vez más a los matemáticos y demás profesionales, desafíos para presentar soluciones a los diversos problemas que de vez en cuando o permanentemente enfrentará el mundo social. En esta ocasión, trajimos en este trabajo un enfoque de un modelo clásico de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias propues-

**Author:** Departamento de Ciências de Base - Instituto Superior Politécnico do Bié, Cuito, Angola; ORCID.  
e-mail: pascoalkanhanga@hotmail.com

to por Kermack y McKendrick[9], el modelo SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) para estudios epidemiológicos que también nos puede ayudar, como es obvio en el estudio del comportamiento numérico de las variables que afectan el caracterización de la infección y recuperación de la malaria. La malaria es una enfermedad que predomina en áreas con clima tropical[4] como Angola y especialmente en regiones con saneamiento deficiente. Es una enfermedad infecciosa transmitida por mosquitos[2]. Estábamos interesados en modelar la malaria por el hecho de que es la mayor causa de muerte en Angola y, para presentar una vez más el poder de los modelos SIR que se pueden utilizar en el estudio del comportamiento, no solo de la malaria sino también en otras enfermedades infecciosas y en casos de enfermedades contagiosas.

Como el modelo SIR es EDO, entonces se eligió el método de Runge-Kutta de cuarto orden para presentar la demostración e implementación computacional y la consecuente ilustración gráfica y numérica del comportamiento de la enfermedad referida. obviamente, se puede utilizar cualquier otro método que nos permita resolver EDO[5],[7] y [3], pero como solo tuvimos que utilizar uno en este trabajo, elegimos el método sencillo y eficiente en sus resultados.

## II. MODELO ENDÉMICO CLÁSICO SIR

Para comprender el comportamiento numérico de la malaria en un intervalo de tiempo determinado, se decidió utilizar el modelo SIR(Susceptibles-Infectados-Recuperados), que es modelo epidemiológico clásico. Y como la malaria en Angola es una enfermedad endémica, hemos utilizado el modelo endémico clásico. El modelo endémico clásico es el modelo SIR con dinámica vital que incluye nacimientos y muerte, cuyo sistema de ecuaciones viene dado por[8]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu P - \mu S - \frac{\beta IS}{P}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{P} - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $S(t)+I(t)+R(t)=P$ . El modelo SIR (2.1) presentado es casi igual en relación al modelo epidémico SIR que podemos encontrar en [8] la diferencia es que el modelo endémico presenta un flujo de recién nacidos en la clase susceptible a tasa  $\mu P$  y muertes en todas las clases a tasas  $\mu S$ ,  $\mu I$  y  $\mu R$ ,  $\mu > 0$ . Dado que las muertes equilibran los nacimientos, entonces el tamaño de la población  $P$  es constante.  $S$ , denota el número de la población susceptible a la enfermedad,  $I$  es el número de infectados y  $R$ , el número de recuperados. También disponemos de parámetros  $\beta$ ,  $\mu$  y  $\gamma$ . Donde  $\gamma$  es la tasa de recuperación,  $\beta$  es la tasa de infección y  $\mu$ , la tasa de muertes. Como el estudio se basa en la ciudad de Cuito, suponemos que la población es fija. Como el problema se analiza en un intervalo de tiempo, es necesario establecer un momento inicial de referencia del estudio para que se pueda abarcar la ingeniosidad del análisis hasta un tiempo final. Así, desde esta perspectiva, la ecuación (2.1) tendrá la forma:

Ref

2. A. P. Gomes, R. R. Vitorino, A. P. Costa, E. G. Mendonça, M. G.A. Oliveira, R. Siqueira-Batista, *Malaria grave por plasmodium falciparum*, Rev. Bras. Ter. Intensiva 23(3), Set, 2011, <https://doi.org/10.1590/s0103-507X2011000300015>.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu P - \mu S - \frac{\beta IS}{P}, S(0) = S_0 > 0, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{P} - \gamma I - \mu I, I(0) = I_0 \geq 0, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, R(0) = R_0 \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

En este caso, ahora tenemos un problema de valor inicial (PVI) de ecuación diferencial ordinaria[6] de primer orden.

### III. FORMA MATRICIAL

Siendo la ecuación (2.1) un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, puede escribirse como sigue:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = f_S(t, S, I, R) \\ \frac{dI}{dt} = f_I(t, S, I, R) \\ \frac{dR}{dt} = f_R(t, S, I, R) \end{cases}$$

Dado que  $t$  es la variable independiente,  $S$ ,  $I$  y  $R$  son variables dependientes. Lo cual presupone que en forma vectorial tenemos

$$\frac{d\underline{Y}}{dt} = \underline{F}(t, \underline{Y})$$

Donde

$$\underline{Y} = S, I, R$$

ó

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{F}(t, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} f_S(t, S, I, R) \\ f_I(t, S, I, R) \\ f_R(t, S, I, R) \end{bmatrix}$$

Lo que podemos interpretar el problema (2.1) como:

Ref

6. N. S. Nedialkova, K. R. Jakson, G. F. Corlissb. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations, Applied Mathematics and Computation, vol.105, issue 1, October 1999, pages 21-68 htps://doi.org/10.1016/s0096-3003(98)10083-8.



$$\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{Y} = \begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\underline{F}(t, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} \mu P - \mu S - \beta IS/P \\ \beta IS/P - \gamma I - \mu I \\ \gamma I - \mu R \end{bmatrix} \quad \underline{Y}(0) = \begin{bmatrix} S(0) \\ I(0) \\ R(0) \end{bmatrix}$$

La forma matricial presentada, siendo  $\underline{Y}$  el vector de las variables S, I y R, lo que nos lleva a la derivada del vector con respecto al tiempo viene dada por  $\frac{d\underline{Y}}{dt}$ , lo que lleva a una función vectorial que depende S, I y R pues luego entonces tendremos  $\underline{F}(t, \underline{Y})$  donde  $t$  es una variable independiente y el vector  $\underline{Y}$  se queda como variable dependiente en la función vectorial.

#### IV. MÉTODOS

La investigación se basó en datos proporcionados por el Departamento de Salud Pública de la Oficina Provincial de Salud de Bié, Angola, con los cuales fue posible realizar predicción basada en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el modelo SIR y, consulta de artículos científicos y libros que abordan este tipo de ecuaciones y métodos con los que se buscan las respectivas soluciones. Una vez modelado el problema y identificado el modelo SIR que mejor se adapta al problema, el clásico modelo SIR endémico, cuyos parámetros muestran la dinámica vital. Para resolver el dicho sistema de ecuaciones que representa el problema se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual permitió la implementación computacional del problema. Fue utilizado el lenguaje de programación, Octave, que es un software muy bueno y es compatible con Matlab. La implementación fue teniendo en cuenta lo que sugiere la documentación de la versión 7.2.0 de Octave para ecuaciones diferenciales ordinarias, en la creación del respectivo Script.

#### V. PROBLEMA MODELADO

Como se dice en la introducción, el problema que se presenta tiene como población de estudio a la ciudad de Cuito, Angola. Por ello, nos interesó estudiar el comportamiento numérico de la malaria en la citada ciudad en los meses de cacimbo (mayo, junio, julio y agosto), también conocido como periodo de invierno, ya que en este mismo periodo no llueve y en consecuencia bajan las temperaturas e infecciones de malaria. Así, a través del Departamento de Salud Pública de la Secretaría Provincial de Salud de Bié, habíamos solicitado datos sobre cifras de malaria. Sin embargo, nos proporcionaron la cantidad de personas infectadas con malaria (16448), la cantidad de recuperaciones (15139), la tasa de infección (28 %), la tasa de recuperaciones (92 %) y la tasa de muertes (8 %) para el mes de mayo de 2022. Como dato inicial para poder predecir a través del modelo (2.1), el comportamiento numérico de la malaria en los demás meses de invierno en la ciudad de Cuito.

Interpretando los datos proporcionados para (2.2), tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = 0,08P - 0,08S - 0,28IS/P \\ \frac{dI}{dt} = 0,28IS/P - 0,92I - 0,08I \\ \frac{dR}{dt} = 0,92I - 0,08R \\ S(0) = 512706, \quad t \in [0, 4] \\ I(0) = 16448, \quad t \in [0, 4] \\ R(0) = 15139, \quad t \in [0, 4] \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Para resolver este problema podemos utilizar entre varios métodos posibles el de Runge-Kutta de 4º y 2º orden, Euler, Euler Modificado, Euler Mejorado. Pero aquí preferimos usar el método de Runge-Kutta de 4º orden porque es más simple y eficiente.

## VI. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA 4º ORDEN

Los métodos de Runge-Kutta de orden superior se obtiene de forma similar a los de segundo orden. Los métodos de tercer orden, por ejemplo, tienen la función de incremento  $\varnothing(x_j, y_j, h) = \alpha K_1 + \beta K_2 + \gamma K_3$  onde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  se aproximan a las derivadas en varios puntos del intervalo  $[x_1, x_{j+1}]$ . Donde la serie de Taylor es fundamental para determinar los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

Entre los diversos métodos de Runge-Kutta, el más popular y eficiente es:

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= Y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ K_1 &= f(x_j, y_j) \\ K_2 &= f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 &= f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= f(x_j + h, y_j + hK_3) \end{aligned} \quad (6.4)$$

El método (6.4) es de Runge-Kutta de 4º orden. Los métodos Runge-Kutta son de arranque automático, ya que son de paso uno y no funcionan con derivada de  $f(x, y)$ [10].

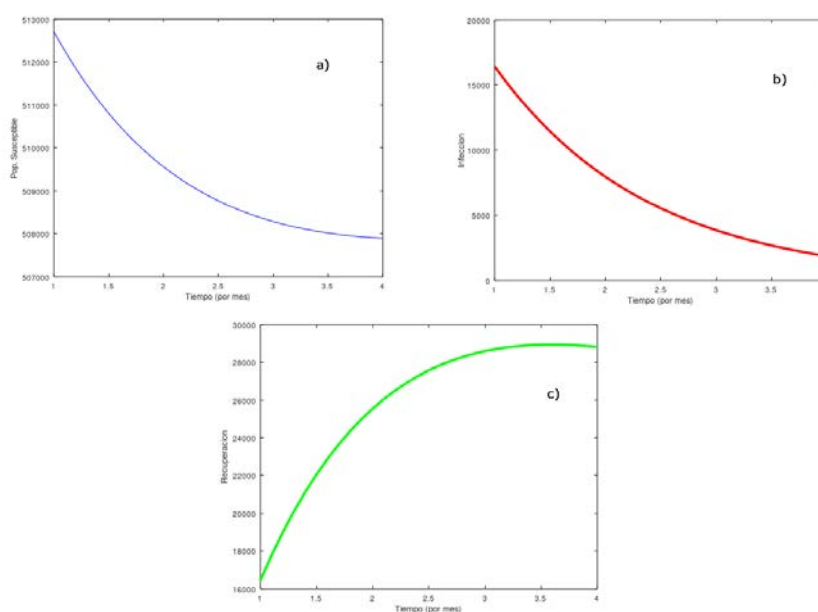
## VII. LOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Con la aplicación del método de Runge-Kutta de 4º orden, se implementó el problema en Octave y resultó en los siguientes datos numéricos:

**Cuadro 1:** Resultados numéricos de las variables  $S$  de la población susceptible,  $I$  de infecciones y  $R$  de recuperación de la malaria.

$t(\text{mensual})$	$S$	$I$	$R$
0	512 706.	16448.000	16448.000
1	509350.624	7475.339	26230.002
2	508093.560	3391.846	29221.579
3	507763.644	1538.129	29238.034

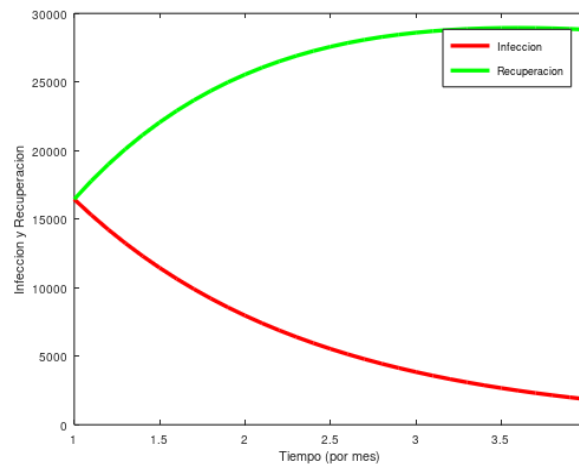
Los resultados de la tabla son mucho más claros en los gráficos siguientes, ya que ilustran el comportamiento visual de las variables de interés:



**Figura 1:** Gráficos de las variables Población Susceptible a), Infección b) y Recuperación c) de la malaria en invierno en la ciudad Cuito, 2022.

Como se puede observar del comportamiento de la recuperación c), se puede notar que existe un crecimiento en la gráfica que en un momento dado hace una inversión lenta y luego desciende, esto se justifica por la tasa alta de recuperación, 92 %, que contrasta con la tasa de infección que es de 28 %, es decir, debido a la reducción de infecciones b), la subida de la gráfica de recuperación va disminuyendo.

Por otro lado, se nota que la gráfica de infecciones b), desciende en tiempo debido a su tasa relativamente baja. Estas infecciones no dependen de los recuperados, ya que la malaria no es una enfermedad contagiosa y su medicación no ofrece inmunidad, este último criterio solo justifica el comportamiento del lento descenso de la gráfica de población susceptible a), los recuperados aparecen y también se convierten en población susceptible. En este caso, se puede verificar en la gráfica siguiente que descienden las infecciones y crecen las recuperaciones hasta mas o menos al mes de Julio y después de eso comienza el descenso:



**Figura 2:** Gráficos de las Infecciones y Recuperaciones de la malaria en la ciudad de Cuito, Bié, Angola en invierno 2022.

## VIII. CONCLUSIÓN

Por lo tanto, el modelo del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizado, modelo endémico SIR, su poder y utilidad en los problemas de evolución, por lo que nos ayuda a realizar experimentos para estudios de ambientes infecciosos, desde el punto de vista sanitario. Por otro lado, el método de Runge-Kutta muestra en su sencillez una eficiencia en los resultados. Y, los resultados del experimento demuestran una dependencia de las recuperaciones en relación a las infecciones, ya que como hemos visto en el comportamiento gráfico de las dos variables, hay un descenso en las recuperaciones porque hay también bajas en las infecciones.

## REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. P. E. Canhanga, Método Galerkin Discontinuo para Ecuación de Lotka-Mckendrick. Tesis de Master, Universidad de Valladolid, 2017.
2. A. P. Gomes, R. R. Vitorino, A. P. Costa, E. G. Mendonça, M. G.A. Oliveira, R. Siqueira-Batista, Malária grave por plasmodium falciparum, Rev. Bras. Ter. Intensiva 23(3), Set, 2011, <https://doi.org/10.1590/s0103-507X2011000300015>.
3. E. Dominguez, F. Ardila, S. Bustamante. Systems solver: an open source tool for mathematically modelling dynamical systems, Ing. Investig. vol. 30n° .3 Bogotá, Sept./Dec. 2010, ISSN 0120-5609.
4. F. Crowmn, J. Healer, D. Marapana, Malária: Biogy and Disease, Cell, vol.167, issue 3, 20 october 2016, pages 610-624, doi: 10.1016/j.cell.2016.07.055.
5. G. Bluman, R. Drid, New solutions for ordinary differential equations. Journal of Symbolic Computation, vol.47, issue 1, january 2012, pages 76-88. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2011.08.018>
6. N. S. Nedialkova, K. R. Jakson, G. F. Corlissb. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations, Applied Mathematics and Coputation, vol.105, issue 1, October 1999, pages 21-68 [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(98\)10083-8](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(98)10083-8).
7. X. Shen, X. Cheng, K. Liang. Deep Euler method: Solving ODEs by approximating the local truncation error of the Euler method, ArXiv: 2003.09573 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.09573>, 2020.

8. H. W. Hethcote, The Mathematics of Infectious Diseases, SIAM Review, Vol. 42, No.4.(Dec.2000),pp.599-653.
9. W. O. Kermack, A. G. McKendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics, part 1, Proc -721.
10. M. A. G. Ruggiero, V. L. da R. Lopes, Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais, 2<sup>a</sup>ed. Pearson, São Paulo, Pearson Makron Books, 1996, ISBN 978-85-346-0204-4.